

Table des matières

Introduction	9
I Histoire	13
I.1 XVII ^e et XVIII ^e siècles : les fondateurs	13
I.1.1 Johannes Kepler (1571-1630)	13
I.1.2 Isaac Newton (1642-1727)	14
I.1.3 Jacob Herman et Johann Bernoulli (publications de 1710) . . .	15
I.2 XVIII ^e et XIX ^e siècles : modernisation	16
I.2.1 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	16
I.2.2 Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)	17
I.2.3 William Rowan Hamilton (1805-1865)	18
I.3 xx ^e siècle : quantification du problème de Kepler	20
I.3.0 Préliminaires	20
I.3.1 W. Lenz (publication de 1924)	20
I.3.2 W. Pauli (publication de 1926)	21
I.3.3 L. Hulthen (publication de 1933)	21
I.3.4 V. Fock (publication de 1936)	22
I.3.5 M. Bander - C. Itzykson (publication de 1966)	23
I.4 xx ^e siècle : retour au problème de Kepler classique	24
I.4.1 H. Bacry - H. Ruegg - J.M. Souriau (publication de 1966) . . .	24
I.4.2 G. Györgyi (publication de 1968)	25
I.4.3 J. Moser (publication de 1970)	25
I.4.4 T. Ligon - M. Schaaf (publication de 1976)	26
I.4.5 R.H. Cushman - J.J. Duistermaat (publication de 1997)	26
I.4.6 G. Heckman - T. de Laat (publication de 2010)	27

II Théorie	35
II.1 Espace des phases du problème de Kepler	35
II.1.0 Introduction	35
II.1.1 Notations générales	35
II.1.2 Généralités	36
II.1.3 Moment cinétique et vecteur excentricité	37
II.1.4 Description de $M^{-1}(l, a)$ dans le cas $l \neq 0, a \neq 0$	38
1.4.1 Le théorème fondamental	38
1.4.2 Description des orbites képlériennes	39
1.4.3 Mouvements physiques	40
1.4.4 Anomalie excentrique	40
1.4.5 Anomalie moyenne	42
II.1.5 Description de $M^{-1}(l, a)$ dans le cas $l \neq 0, a = 0$	42
1.5.1 Le théorème fondamental	42
1.5.2 Description des orbites et des mouvements physiques	43
II.1.6 Description de $M^{-1}(l, a)$ dans le cas $l = 0, a \neq 0$	43
1.6.1 Le théorème fondamental	43
1.6.2 Description des orbites et des mouvements physiques	44
II.1.7 Commentaire 1	45
II.1.8 Commentaire 2	46
II.2 Espace fibré cotangent à la sphère \mathbf{S}^3	46
II.2.0 Introduction	46
II.2.1 Métrique riemannienne sur \mathbf{S}^3	47
II.2.2 Hamiltonien sur $T^*(\mathbf{S}^3)$	47
II.2.3 Passage de $T^*(\mathbf{S}^3)$ à $T^*(\mathbf{R}^4)$	48
II.2.4 Étude de trois fonctions vectorielles sur $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$	49
II.2.5 Commentaires	49
II.3 Passage de l'espace euclidien à la sphère	49
II.3.0 Introduction	49
II.3.1 L'application Φ_0	50
3.1.1 Définition et premières propriétés	50
3.1.2 Transport de champs de vecteurs	51
3.1.3 Commentaires	51
II.3.2 L'application Φ_{LS}	51
3.2.1 Première définition	51

3.2.2	Seconde définition	52
3.2.3	Transport de champs de vecteurs	53
3.2.4	Description géométrique de Φ_0 , Φ_{LS} et leurs inverses	53
II.3.3	Commentaires	54
II.3.4	Questions de formes différentielles	55
II.3.5	Commentaire	56
II.4	Action de groupes et algèbres de Lie	56
II.4.0	Introduction	56
II.4.1	Actions de $SO(3)$ et $o(3)$ sur l'espace des phases képlérien P	57
II.4.2	Actions de $SO(4)$ et $o(4)$ sur P''	57
II.4.3	Action de $o(4)$ sur P_-	58
II.4.4	Commentaires	58
II.4.5	Compactification des surfaces d'énergie	59
II.5	Atome d'hydrogène	60
II.5.0	Introduction	60
II.5.1	Préliminaires	61
II.5.2	Passage de \mathbf{R}^3 à \mathbf{S}^3	61
II.5.3	Transport de fonctions	61
II.5.4	Transport d'opérateurs et de sous-espaces propres	62
II.5.5	Autres résultats de Bander et Itzykson	63
III	Annexes	65
A.1	Géométrie différentielle	65
A.1.0	Introduction	65
A.1.1	Variétés différentielles	65
A.1.2	Vecteurs tangents. Champs de vecteurs. Flots	66
A.1.3	Espaces fibrés tangents et cotangents	68
A.1.4	Formalismes lagrangien et hamiltonien	69
A.1.5	Action de groupes et d'algèbres de Lie	71
A.1.6	Formes différentielles (extérieures)	72
A.2	Mécanique quantique	75
A.2.0	Introduction	75
A.2.1	Quelques notations	75
A.2.2	Harmoniques sphériques	76

A.2.3	Transformation de Fourier-Plancherel (ou, plus brièvement, de Fourier)	78
A.2.4	Espaces de Sobolev	79
A.2.5	Opérateurs autoadjoints	80
A.2.6	Formalisme de la Mécanique quantique	81
A.2.7	Traitement usuel de l'atome d'hydrogène	82
A.3	Prolongements divers	83
A.3.0	Introduction	83
A.3.1	Utilisation de groupes de Lie de plus grandes dimensions	84
A.3.2	Problème à N corps	84
A.3.3	Cas des énergies strictement positives	85
Index		89
Bibliographie		93
B.1.	Avant 1900	93
B.2.	Après 1900 : travaux originaux, problème classique	93
B.3.	Après 1900 : travaux originaux, problème quantique	95
B.4.	Après 1900 : manuels adaptés au problème classique	95
B.5.	Après 1900 : manuels adaptés au problème quantique	96