

Table des matières

Introduction	1
1. L'intégrale de Lebesgue	7
1.1. Intégrale des fonctions positives	7
1.2. Fonctions sommables	11
1.3. Cas de la dimension 1	16
1.4. Intégrales multiples	18
1.5. Espaces \mathcal{L}^1 , \mathcal{L}^2 , \mathcal{L}^∞	20
1.6. Sur la construction de l'intégrale	22
1.7. Les quatre opérations	25
2. Topologie générale et espaces fonctionnels	29
2.1. Espaces métriques (propriétés topologiques)	29
2.2. Espaces métriques (propriétés uniformes)	32
2.3. Espaces métriques compacts	35
A. Généralités	35
B. Exemples et applications	38
C. Partitions de l'unité	42
2.4. Espaces vectoriels normés	44
2.5. Espaces de Hilbert	48
2.6. Espaces fonctionnels classiques	56
2.7. Séries de Fourier	64

3. Fonctions différentiables et approximation	69
3.1. Espaces de fonctions différentiables	69
3.2. Partitions de l'unité C^∞	73
3.3. Convolution	76
3.4. Régularisation	79
3.5. Approximation dans un ouvert	82
4. Les distributions	85
4.1. Introduction	85
4.2. Définition et convergence	88
4.3. Dérivées	90
4.4. Exemples de distributions	92
A. Fonctions localement sommables	92
B. Mesures de Radon	94
C. Multipôles, couches multiples	96
D. Valeurs principales et parties finies	97
5. Opérations sur les distributions	99
5.1. Opérations élémentaires	99
5.2. Multiplication par les fonctions C^∞	101
5.3. Dérivation (dimension 1)	102
5.4. Dérivation (dimension quelconque)	106
A. Formule de Stokes (cas d'un surgraphe)	106
B. Formule de Stokes (cas d'un ouvert régulier)	108
C. Formule des sauts dans l'espace	111
D. Applications	112
6. Espaces particuliers de distributions	115
6.1. Distributions à support compact	115
6.2. Espaces de Sobolev d'ordre entier	119
A. Notions de régularité	119
B. Définition et propriétés	120
C. Applications	124
6.3. Distributions périodiques	128

7. Convolution	131
7.1. Préliminaires	131
7.2. Convolution d'une distribution et d'une fonction C^∞	135
7.3. Convolution et translations	138
A. Propriété caractéristique de la convolution	138
B. Interprétation physique	140
7.4. Convolution des distributions	142
7.5. Mode d'emploi	146
A. Conditions de Définition	146
B. Propriétés fondamentales	147
C. Modes de calcul	147
8. Quelques équations de la physique mathématique	149
8.1. Généralités sur les équations de convolution	149
8.2. Équations de Laplace et de Poisson	151
8.3. Équation des ondes	154
8.4. Équations différentielles et intégrales	159
9. Transformation de Fourier	163
9.1. Transformation de Fourier des fonctions sommables	163
9.2. L'espace \mathcal{S} de Schwartz	167
9.3. L'espace \mathcal{S}' des distributions tempérées	170
9.4. Transformation de Fourier des distributions tempérées	173
A. Résultats généraux	173
B. Transformation de Fourier dans \mathcal{E}'	175
C. Transformation de Fourier dans L^2	177
9.5. Les propriétés fondamentales	178
A. L'échange de la convolution et de la multiplication	178
B. Équations de convolution	181
9.6. Transformation de Fourier partielle et équations d'évolution	184
9.7. Vers l'analyse microlocale	189
9.8. Transformation de Laplace	191

10. Espaces de Sobolev	195
10.1. Structure hilbertienne et dualité	195
10.2. Régularité et caractère local	198
10.3. Traces et prolongements	200
A. Trace d'une fonction définie dans \mathbb{R}^n	200
B. L'espace $H^1(\mathbb{R}_+^n)$	203
10.4. Problème de Dirichlet dans un ouvert régulier	206
A. Traces	207
B. Problème de Dirichlet homogène	209
C. Problème de Dirichlet non homogène	211
D. Vers l'analyse spectrale	213
10.5. Problème de Cauchy et semi-groupes	214
A. Compléments de calcul différentiel	221
A.1. Applications différentiables	221
A.2. Hypersurfaces	224
A.3. Intégrale de surface	228
A.4. Cartes et sous-variétés	231
B. Espaces de Baire	235
B.1. Résultats fondamentaux	235
B.2. Quelques applications	236
C. Espaces de Fréchet	239
C.1. Espaces localement convexe métrisables	239
C.2. Exemples d'espaces de Fréchet	241
C.3. Le théorème de Banach-Steinhaus	243
C.4. Continuité des applications bilinéaires	246
Bibliographie	249
Index	251
Index des notations	262
Principaux espaces fonctionnels	263