Table des matières

Préface 11
1. Le projet de l'ouvrage 11
2. Le plan de l'ouvrage 11
3. Contexte et remerciements 15

Introduction 21
1. L'origine de l'espace et la neurogéométrie 21
2. Géométrie perceptive et neurogéométrie 22
3. La "two fold way" de la géométrie 23
4. Idéalités et processus matériels 24
5. Réquisits mathématiques de l'ouvrage 26
6. Le niveau de l'investigation 26
7. Le contexte des sciences cognitives 27
8. Systèmes complexes et physique du mental 29
9. Le problème philosophique des sciences cognitives 30
10. Quelques exemples 31
10.1. Le concept gestaltiste de bonne continuation 32
10.2. Les contours illusoires à la Kanizsa 32
10.3. Les phénomènes de vision entoptique 33
10.4. Le concept de *cut locus* 33

Partie 1. Neurophysiologie 37

Chapitre 1. Champs récepteurs et analyse en ondelettes 39
1. Structure des voies visuelles rétino-géniculo-corticales 39
2. Champs récepteurs et profils récepteurs 40
2.1. La structure de la rétine 42
2.2. Neurones et potentiels d'action 44
2.3. Structure des photorécepteurs 45
2.4. Champs récepteurs généraux et codage neuronal 46
3. Profils récepteurs : ondelettes de Gabor et dérivées de gaussiennes . . . 54
4. Les neurones visuels comme opérateurs de convolution 57
5. Vision et ondelettes 61
5.1. Fourier, Gabor et ondelettes 61
5.2. Ondelettes et discontinuités 64
5.3. Redondance des ondelettes 65
5.4. Compression et géométrie 67
5.5. "Matching pursuit" et "rank coding" 67

6. Les détecteurs de traits 69
7. Profils récepteurs et théorie de l'information 69
8. Traitement du signal et formatage géométrique 71

Chapitre 2. Architecture fonctionnelle de $V1$ 73
1. Les aires du cortex visuel 73
2. La structure hypercolomnaire de l'aire $V1$ 73
3. $V1$ comme fibration 79
3.1. Fibration et "engrafted variables" 79
3.2. Fibrations géométriques 81
3.3. $V1$ comme fibration géométrique 82
3.4. $V1$ comme fibré des 1-jets 83
3.5. Généralisation du modèle 85
3.6. La neurophysiologie et son idéalisation géométrique 86
4. La structure en pinwheels de $V1$ 86
4.1. Les pinwheels 86
4.2. Points d'arrêt et points triples 87
4.3. Distorsions, défauts, structure au voisinage du bord $V1/V2$ 88
4.4. Structure au voisinage des singularités 89
4.5. Microscopie confocale biphotonique 91
4.6. Pinwheels et éclatements 95
4.7. Du modèle de l'éclatement au modèle de la fibration 98
4.8. L'indépendance position / orientation 100
4.9. Autres "engrafted variables" : phase et fréquence spatiale 101
4.10. La généralité des pinwheels 103
5. Pinwheels et dominance oculaire 104
6. Le recollement hémisphérique et les connexions calleuses 107
7. La morphogenèse des pinwheels et de l'architecture fonctionnelle 110
8. Les structures d'espace topologique et de variété différentiable 111
8.1. Le problème d'un espace immanent global 111
8.2. L'implémentation neuronale de la topologie 112
8.3. L'implémentation neuronale de la structure différentiable 114
9. Connexions horizontales et structure de contact 116
10. Lien avec les ondelettes 118

Partie 2. Géométrie 121

Chapitre 3. $V1$ comme structure de contact 123
1. Méthodologie des modèles géométriques 123
2. Relevées legendriennes, forme de contact et espace des 1-jets 124
2.1. L'espace des 1-jets 124
2.2. E(2)-invariance 125
2.3. Relevées legendriennes et condition d'intégrabilité 126
2.4. Structure de contact et courbure 128
2.5. La non-intégrabilité de la structure et la condition de Frobenius . . 130
2.6. Symplectisation de la structure de contact de J^1M 131
2.7. Structures de contact et groupes de Lie 132

2.8. Représentations adjointe et coadjointe, la forme de Maurer-Cartan . 134
2.9. Structures de contact et connexions 136
2.10. Géométrie sous-riemannienne 137
2.11. Le problème des surfaces “régulières” de V 138
3. Structure de contact et groupe des déplacements du plan 139
4. Structures de contact et vision 141

Chapitre 4. Intégration des contours et champ d'association 143
1. Les expériences 143
2. Explication au moyen du concept de champ d'association 145
3. Le champ d'association et la structure de contact (Y. Tondut) 147
4. Le lien avec les connexions horizontales (J. Lorenceau) 149
5. Liage ou “binding” 150
6. Comparaison avec d'autres données 150

Chapitre 5. Contours illusoires modaux et géodésiques 153
1. Complétion modale VS complétion amodale 153
2. Les contours illusoires 154
2.1. Exemples de contours subjectifs modaux 154
2.2. Quelques données expérimentales 158
2.3. Modèles classiques de contours subjectifs 160
2.4. Une expérience sur les K-contours (avec J. Ninio) 163
3. Les premiers modèles variationnels (Ullman, Horn, Mumford) 164
3.1. Les principes variationnels 164
3.2. Les modèles de Ullman et Horn 166
3.3. Le modèle des elastica de Mumford 167
3.4. Des elastica aux problèmes variationnels dans les espaces de jets . . 169
3.5. Contours illusoires et surfaces minimales 170
3.6. Contours illusoires et courbes minimales 171
3.7. “Géodésiques legendriennes” dans le fibré de contact 171
4. Le premier modèle géodésique dans $V1$ 171
4.1. Les équations d'Euler-Lagrange 171
4.1.1. Cas général 171
4.1.2. Intégration numérique dans le cas symétrique 174
4.1.3. Equation différentielle sur la courbure 175
4.2. Les équations d'Euler-Lagrange en termes de longueur d'arc 177
4.3. Le modèle du fibré en cercles 178
4.4. Les courbes de moindre énergie 181
4.5. Comparaison avec les elastica 182
4.6. Groupes de Lie, perception et kinesthésie 183
4.7. Les repères mobiles et le fibré principal du groupe des déplacements 184
4.8. Les représentations adjointe et co-adjointe 185
4.8.1. L'algèbre de Lie de G 185
4.8.2. Changements de repère et automorphismes intérieurs 186
4.8.3. La représentation adjointe 187
4.8.4. Les orbites de la représentation adjointe 187
4.8.5. La représentation co-adjointe 188

4.8.6. Les orbites de la représentation co-adjointe 189
4.9. Le formalisme d'Elie Cartan 190
4.9.1. La forme de Maurer-Cartan 190
4.9.2. Les équations de Maurer-Cartan 191
4.10. Les problèmes variationnels d'après Bryant et Griffiths 192
4.10.1. Le système de Pfaff des relevées dans le fibré principal G . . . 192
4.10.2. La fonctionnelle du problème variationnel 194
4.10.3. Les équations d'Euler-Lagrange 194
4.10.4. L'interprétation géométrique des équations d'Euler-Lagrange . 197
4.10.5. Retour sur les modèles du fibré en cercle et des elastica . . . 199

Chapitre 6. Contours illusoires modaux et géodésiques sous-riemanniennes 201
1. Les géodésiques sous-riemanniennes de $V1$ (A. Agrachev et I. Moiseev) . 201
1.1. Le système hamiltonien des géodésiques 201
1.2. Intégration dans le cas d'une impulsion de module 1 204
1.3. Non commutativité et complexité 207
1.4. Une application : la bistabilité des contours illusoires 208
2. La sphère et le front d'onde sous-riemanniens 210
2.1. Cas du groupe de Heisenberg I (d'après Beals, Gaveau et Greiner) . 210
2.2. Application exponentielle, cut locus et points conjugués 215
2.3. Cas du groupe de Heisenberg II 216
2.4. Autres résultats 220
2.5. Caustiques génériques (d'après Agrachev, Gauthier et Zakalyukin) . 222
3. Groupes de Carnot et variétés de Heisenberg 223
3.1. Groupes de Carnot 223
3.2. Groupes de Carnot et champ d'association 225
3.3. Variétés de Heisenberg, nilpotentisation et cônes tangents 226

Chapitre 7. États cohérents, analyse harmonique et géométrie sous-riemannienne 229
1. Représentations de carré intégrable et états cohérents 229
2. Analyse harmonique et groupe de Heisenberg 231
3. Analyse harmonique et géométrie sous-riemannienne 232
3.1. Le cas classique 232
3.2. Le cas Heisenberg (Gaveau, Beals, Chang, Greiner) 234
3.3. Le cas de la vision 236

Partie 3. Physique 239

Chapitre 8. Réseaux de neurones et champs d'oscillateurs 241
1. Dynamiques neuronales 241
2. Réseaux de neurones, catégorisation et apprentissage 246
3. Le problème du liage et les réseaux d'oscillateurs 252
3.1. Codage neuronal de la cohésion 252
3.2. Le modèle général 253
3.3. Y. Kuramoto : la synchronisation comme transition de phase . . . 254

3.4. H. Daido : le groupe de renormalisation 256
3.5. E. Lumer : distances ultramétriques et synchronisation par paliers . 258
3.6. Raffinement des modèles 258
3.7. Apprentissage dans les réseaux d'oscillateurs 259
3.8. P. Coullet : réseaux d'oscillateurs et patterns morphologiques . . . 259
3.9. Modèles dynamiques 260

Chapitre 9. Modèles de vision entoptique d'après Bressloff, Cowan et Golubitsky 265
1. La vision entoptique 265
2. L'idée de base du modèle 268
3. Les équations de Wilson-Cowan de $V1$ 269
3.1. De l'EDO de Hopfield à l'EDP de Wilson-Cowan 269
3.2. L'encodage de l'architecture fonctionnelle dans les poids synaptiques 270
3.3. La E(2)-équivariance de l'EDP 271
4. Morphologies émergentes et bifurcations 272
4.1. L'idée de base des bifurcations 272
4.2. Les étapes de l'analyse spectrale 272
4.3. Développements de Fourier et équations de dispersion 274
4.4. Anisotropie latérale faible et développements perturbatifs 276
4.4.1. Le "ring model" 276
4.4.2. Développements perturbatifs (cas $p = 1$) 276
4.5. Instabilité et bifurcations 278
5. Modèles sur réseaux 278
5.1. L'hypothèse de double périodicité 278
5.2. Espaces de solutions 280
5.3. L'action du groupe $\Gamma_{\mathcal{L}}$ sur les coordonnées de $\mathcal{K}$ 280
5.3.1. Le cas carré 280
5.3.2. Le cas hexagonal 281
5.3.3. Le cas rhombique 283
6. Application de l'"equivariant branching lemma" de Golubitsky 283
6.1. Cas $\mathcal{L}$ carré et u paire. Le principe de maximisation 283
6.2. Cas $\mathcal{L}$ carré et u impaire 286
6.3. Cas $\mathcal{L}$ rhombique 287
6.4. Cas $\mathcal{L}$ hexagonal, u impaire 288
6.4.1. Cas $|c_1| < |c_2| < |c_3|$ 288
6.4.2. Cas $|c_1| < |c_2| = |c_3|$ 288
6.4.3. Cas $|c_1| = |c_2| < |c_3|$ 288
6.4.4. Cas $|c_1| = |c_2| = |c_3|$ 289
6.5. Cas $\mathcal{L}$ hexagonal, u paire 290
7. Planforms non orientées 291
8. Représentations simplifiées des planforms 292
8.1. Cas du réseau carré pair 292
8.2. Autres cas 293
9. La perception de patterns émergents comme images rétiniennes virtuelles 295
10. Le problème de la stabilité 297
11. Améliorations possibles du modèle 299

11.1. Equilibres dynamiques 300
11.2. Fréquences spatiales et harmoniques sphériques 301

Chapitre 10. Géométrie symplectique et analyse des formes (en collaboration avec G. Citti et A. Sarti) 303
1. Géométrie et filtrage 303
2. Filtrage et structure de contact 303
2.1. Ondelette mère et état cohérent 303
2.2. Localisation des champs récepteurs 305
3. Géométrie fonctionnelle des hypercolonnes 305
4. Sélectivité maximale et interprétation géométrique des relèvements . . . 306
4.1. La procédure de maximisation 306
4.2. Détection de contours et mesure de distance 307
4.3. Neurones simples et 1-formes associées 309
4.4. Relèvements et champs de 1-formes 310
5. Connexions corticales de longue portée et structure symplectique 310
5.1. Fibré cotangent et état cohérent 311
5.2. La structure symplectique et l'échelle comme champ de jauge . . . 311
5.3. La structure complexe 312
5.4. Cas du fibré des jets 313
6. Géométrie symplectique et morphogenèse 313
6.1. Courbes intégrales de champs de vecteurs spéciaux 313
6.2. Relèvements, surfaces lagrangiennes et équation eikonale 316
6.3. Squelettisation des formes 318
6.3.1. La diffusion de contour d'Harry Blum et le modèle du "grassfire" 318
6.3.2. Squelettisation et constituance méréologique 321
6.3.3. Cut locus multi-échelle 322
6.3.4. Confirmation par l'imagerie 322
6.4. Cut locus et variétés lagrangiennes 322
7. Un second modèle, sous-riemannien, pour l'échelle 324

Chapitre 11. Morphologie des images : échelle et segmentation . . . 327
1. Analyse multi-échelle 327
2. Théorie multi-échelle des singularités selon J. Damon 328
2.1. De Thom et Mather à Damon 329
2.2. Analyse graphique de la création de points critiques par diffusion . 331
2.2.1. Forme des points critiques 332
2.2.2. Représentations des surfaces 333
2.2.3. Plongement dans le déploiement de l'ombilic elliptique 337
3. Équations de diffusion non linéaires anisotropes 340
4. Modèles variationnels de segmentation à la Mumford-Shah 345
5. Liens entre les modèles variationnels et les modèles de diffusion 353
6. Les travaux des analystes de l'école italienne 355
7. Le modèle de Mumford-Shah comme modèle de synchronisation 358

Partie 4. Epistémologie 361

Chapitre 12. Le problème de la conscience visuelle et la neurogéométrie 363
1. Réductionnisme VS conscience phénoménale : le rôle de la géométrie . . 364
2. La conscience visuelle comme émergence 366
3. Intérêt philosophique des modèles de vision entoptique 368
3.1. Statut de l'exemple 368
3.2. L'accord $2 \leftrightarrow 3$ 369
3.3. L'émergence $1 \rightarrow 2$ comme corrélat neuronal 371
3.4. Emergentisme dynamique 372

Chapitre 13. Esthétique transcendantale, phénoménologie de la perception et matérialisme neuronal 375
1. Phénoménologie de la perception 375
1.1. Perception et réduction 375
1.2. Auto-position VS exposition, immanence VS transcendance 376
1.3. Vécus et spatialité 377
1.4. Présentation (*Darstellung*) et Appréhension (*Auffassung*) 378
1.5. Caractères eidétiques des schèmes sensibles 378
1.6. Le parallèle avec la théorie perceptive de D. Marr 379
2. L'analyse morphologique des images 380
2.1. La relation de dépendance "qualité $\rightarrow$ extension" 380
2.2. Séparation et Fusionnement. Continuité et discontinuités qualitatives 381
2.3. Lien avec le modèle de Mumford-Shah et les équations anisotropes . 382
3. Vision et kinesthésie dans *Ding und Raum* 382
3.1. L'ordre spatial $2D$ du champ visuel 382
3.2. Le rôle constitutif des kinesthèses 383
3.3. Les sensations kinesthésiques 384
3.4. L'espace des contrôles kinesthésiques et ses chemins 384
3.5. Le contrôle kinesthésique et la relativité du mouvement 384
3.6. Le contrôle kinesthésique comme opérateur sur les chemins 385
3.7. Le contrôle kinesthésique comme opérateur de recollement 385
3.8. Intentionnalité transversale et rayons intentionnels 386
4. Le contrôle kinesthésique du regard d'après A. Berthoz 387
4.1. Perception et action 387
4.2. La proprioception 388
4.3. La kinesthésie des saccades oculaires 389
4.3.1. Le réflexe vestibulo-oculaire 389
4.3.2. La poursuite oculaire 389
4.3.3. Le réflexe optocinétique 389
4.4. Les saccades oculaires 390
5. Éléments de constitution de la réalité objective 392
5.1. La temporalité objective 392
5.2. La stéréopsie 393
5.3. Typique des chemins et ontologie objective 393
6. Esthétique transcendantale et neurogéométrie 395
6.1. Les deux eidétiques et leurs fondations 395
6.2. Synthétique a priori et neurosciences 396

6.3. Neurogéométrie et exposition métaphysique 397
6.4. Géométrie et réflexion : la “décompilation” du calcul neuronal . . . 397
6.5. Intuitif VS Conceptuel 398

Conclusion 401

Bibliographie 405