

Table des matières

I	Stabilité, Commandabilité et Observabilité	11
1	Introduction	13
1.1	Un exemple emprunté à la robotique	13
1.2	Le plan	18
1.3	Problème	19
2	Étude de cas	21
2.1	Le bio-réacteur	21
2.1.1	Étude à $D > 0$ fixé	22
2.1.2	Stabilisation (globale) par feedback (borné)	26
2.2	L'avion à décollage vertical	29
2.2.1	Modèle de simulation	30
2.2.2	Modèle de commande	31
2.2.3	Commande linéaire	31
2.2.4	Commande non-linéaire	34
2.3	Pendule inversé sur un rail	35
2.4	Moteur électrique à courant continu	37
2.4.1	Stabilité en boucle ouverte	38
2.4.2	Estimation de la vitesse et de la charge	38
2.4.3	Le contrôleur	40
2.4.4	L'observateur-contrôleur	40
2.4.5	Robustesse par rapport à la dynamique rapide du courant	41
2.4.6	Boucle rapide et contrainte de courant	42
3	Systèmes dynamiques explicites	45
3.1	Espace d'état, champ de vecteurs et flot	45
3.1.1	Un modèle élémentaire de population	45
3.1.2	Existence, unicité, flot	47
3.1.3	Remarque sur l'espace d'état	56
3.1.4	Résolution numérique	57
3.1.5	Comportements asymptotiques	58
3.1.6	L'étude qualitative ou le contenu des modèles	62

3.2	Points d'équilibre	62
3.2.1	Stabilité et fonction de Lyapounov	62
3.2.2	Les systèmes linéaires	68
3.2.3	Lien avec le linéaire tangent	71
3.3	Systèmes dynamiques discrets	74
3.3.1	Point fixe et stabilité	74
3.3.2	Les systèmes linéaires discrets	75
3.4	Stabilité structurelle et robustesse	76
3.5	Théorie des perturbations	79
3.5.1	Les perturbations singulières	81
3.5.2	Moyennisation	84
3.6	Problèmes	87
4	Commandabilité et observabilité	91
4.1	Commandabilité non linéaire	92
4.1.1	Définition	92
4.1.2	Intégrale première	93
4.2	Commandabilité linéaire	95
4.2.1	Matrice de commandabilité	95
4.2.2	Invariance	97
4.2.3	Un exemple	99
4.2.4	Critère de Kalman et forme de Brunovsky	100
4.2.5	Planification et suivi de trajectoires	103
4.2.6	Linéarisation par bouclage	106
4.3	Observabilité non linéaire	110
4.3.1	Définition	110
4.3.2	Critère	111
4.3.3	Observateur, estimation, moindre carré	113
4.4	Observabilité linéaire	114
4.4.1	Le critère de Kalman	115
4.4.2	Observateurs asymptotiques	116
4.4.3	Observateur réduit de Luenberger	117
4.5	Observateur-contrôleur linéaire	118
4.6	Problèmes	119
5	Systèmes semi-implicites et inversion	127
5.1	Systèmes semi-implicites	129
5.1.1	Un exemple	129
5.1.2	Le cas général	132
5.1.3	Linéaire tangent	135
5.1.4	Résolution numérique	136
5.2	Inversion et découplage	137
5.2.1	Un exemple	138
5.2.2	Le cas général	140

II	Analyse Fréquentielle	145
1	Représentation fréquentielle	149
1.1	Système dynamique linéaire	149
1.2	Transformations de Laplace et de Fourier	150
1.3	Calcul symbolique	152
1.4	Réalisation en variables d'état d'un système	154
1.5	Systèmes mono-entrée, mono-sortie	157
1.6	Systèmes à déphasage minimal	158
1.7	Diagramme de Bode	160
1.8	Systèmes du second ordre	162
2	Stabilisation des systèmes bouclés	165
2.1	Bouclage sur la sortie. Système équivalent	165
2.2	Stabilité du système bouclé	166
2.3	Critère de Nyquist	167
2.4	Aspects pratiques du calcul	169
2.5	Analyse basée sur l'abaque de Black	171
2.6	Synthèse P.I.D., avance et retard de phase	174
2.7	Loop shaping	177
3	Systèmes positifs réels	179
3.1	Positivité de l'opérateur d'entrée-sortie	179
3.2	Caractérisations de la positivité	180
3.3	Coercivité de la fonction potentiel	183
3.4	Critère de Popov et critère du cercle	183
III	Méthodes Numériques en Commande Optimale	185
1	Temps minimal : systèmes linéaires	187
1.1	Introduction	187
1.2	Un problème d'alunissage	187
1.3	Existence de solutions	189
1.3.1	Position du problème	189
1.3.2	Résultats d'existence	190
1.4	Conditions d'optimalité	191
1.4.1	Séparation de l'ensemble accessible de la cible	191
1.4.2	Critère linéaire sur l'état final	193
1.4.3	Etat adjoint et principe du minimum	196
1.5	Exemples et classes particulières	197
1.5.1	Contraintes de bornes sur la commande	197
1.5.2	Cas de l'oscillateur harmonique	199
1.5.3	Stabilisation d'un pendule inversé	200

1.5.4	Cibles épaisses	202
2	Temps minimal : systèmes non linéaires	205
2.1	Présentation du problème	205
2.1.1	Un exemple	205
2.1.2	Spécification du problème	206
2.1.3	Existence de solutions	206
2.2	Conditions d'optimalité	208
2.2.1	Un résultat général	208
2.2.2	Arc singulier	208
2.3	Applications	211
2.3.1	Pendule	211
2.3.2	Avion à trajectoire horizontale	213
2.4	Démonstration du résultat principal	214
2.5	Notes	219
3	Commande optimale : l'approche HJB	221
3.1	Cadre	221
3.2	Valeur fonction de l'état	222
3.2.1	Principe de programmation dynamique	222
3.2.2	Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman	224
3.2.3	Continuité uniforme de la valeur	226
3.3	Commande optimale	227
3.4	Solution de viscosité	229
3.4.1	Notion de solutions de viscosité	229
3.4.2	Théorème de comparaison	231
3.5	Temps d'arrêt et commande impulsionnelle	234
3.5.1	Problèmes avec temps d'arrêt	234
3.5.2	Commande impulsionnelle	235
3.6	Notes	238
4	Résolution numérique de l'équation HJB	239
4.1	Motivation : problème continu	239
4.2	Schémas décentrés et extensions	240
4.2.1	Dimension d'espace $n = 1$	240
4.2.2	Forme de point fixe contractant	241
4.2.3	Dimension d'espace quelconque	243
4.2.4	Discrétisation par triangulation	244
4.3	Convergence des schémas et essais numériques	245
4.3.1	Un argument élémentaire de convergence	245
4.3.2	Estimation d'erreur	246
4.3.3	Equation eikonale	249
4.3.4	Problème d'alunissage	250
4.4	Notes	251

5	Commande optimale stochastique	253
5.1	Chaînes de Markov commandées	253
5.1.1	Quelques exemples	253
5.1.2	Chaînes de Markov et valeurs associées	253
5.1.3	Quelques lemmes	255
5.1.4	Principe de Programmation dynamique	256
5.1.5	Problèmes à horizon infini	257
5.1.6	Algorithmes numériques	258
5.1.7	Problèmes de temps de sortie	260
5.1.8	Problèmes avec décision d'arrêt	261
5.1.9	Un algorithme implémentable	262
5.2	Problèmes en temps et espace continus	264
5.2.1	Position du problème	264
5.2.2	Problème discrétisé en temps	265
5.2.3	Schémas monotones : dimension 1	267
5.2.4	Différences finies classiques	268
5.2.5	Différences finies généralisées	271
5.2.6	Analyse de la condition de consistance forte	273
5.3	Notes	274