

# Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION A LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET A LA SIMULATION NUMÉRIQUE</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction générale . . . . .	1
1.2	Un exemple de modélisation . . . . .	2
1.3	Quelques modèles classiques . . . . .	9
1.3.1	Équation de la chaleur . . . . .	9
1.3.2	Équation des ondes . . . . .	10
1.3.3	Le Laplacien . . . . .	12
1.3.4	Équation de Schrödinger . . . . .	12
1.3.5	Système de Lamé . . . . .	13
1.3.6	Système de Stokes . . . . .	14
1.3.7	Équations des plaques . . . . .	14
1.4	Calcul numérique par différences finies . . . . .	15
1.4.1	Principes de la méthode . . . . .	15
1.4.2	Résultats numériques pour l'équation de la chaleur . . . . .	18
1.4.3	Résultats numériques pour l'équation d'advection . . . . .	22
1.5	Remarques sur les modèles mathématiques . . . . .	26
1.5.1	Notion de problème bien posé . . . . .	27
1.5.2	Classification des équations aux dérivées partielles . . . . .	29
<b>2</b>	<b>MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES</b>	<b>31</b>
2.1	Introduction . . . . .	31
2.2	Différences finies pour l'équation de la chaleur . . . . .	32
2.2.1	Divers exemples de schémas . . . . .	32
2.2.2	Consistance et précision . . . . .	35
2.2.3	Stabilité et analyse de Fourier . . . . .	37
2.2.4	Convergence des schémas . . . . .	42
2.2.5	Schémas multiniveaux . . . . .	44
2.2.6	Le cas multidimensionnel . . . . .	46
2.3	Autres modèles . . . . .	51
2.3.1	Équation d'advection . . . . .	51
2.3.2	Équation des ondes . . . . .	59

<b>3</b>	<b>FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES</b>	<b>65</b>
3.1	Généralités . . . . .	65
3.1.1	Introduction . . . . .	65
3.1.2	Formulation classique . . . . .	66
3.1.3	Le cas de la dimension un d'espace . . . . .	67
3.2	Approche variationnelle . . . . .	68
3.2.1	Formules de Green . . . . .	68
3.2.2	Formulation variationnelle . . . . .	71
3.3	Théorie de Lax-Milgram . . . . .	74
3.3.1	Cadre abstrait . . . . .	74
3.3.2	Application au Laplacien . . . . .	77
<b>4</b>	<b>ESPACES DE SOBOLEV</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction et avertissement . . . . .	81
4.2	Fonctions de carré sommable et dérivation faible . . . . .	82
4.2.1	Quelques rappels d'intégration . . . . .	82
4.2.2	Dérivation faible . . . . .	83
4.3	Définition et principales propriétés . . . . .	86
4.3.1	Espace $H^1(\Omega)$ . . . . .	86
4.3.2	Espace $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	90
4.3.3	Traces et formules de Green . . . . .	92
4.3.4	Un résultat de compacité . . . . .	97
4.3.5	Espaces $H^m(\Omega)$ . . . . .	98
4.4	Quelques compléments utiles . . . . .	101
4.4.1	Démonstration du Théorème 4.3.5 de densité . . . . .	101
4.4.2	Espace $H(\text{div})$ . . . . .	103
4.4.3	Espaces $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	105
4.4.4	Dualité . . . . .	106
4.5	Lien avec les distributions . . . . .	107
<b>5</b>	<b>ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES</b>	<b>111</b>
5.1	Introduction . . . . .	111
5.2	Étude du Laplacien . . . . .	112
5.2.1	Conditions aux limites de Dirichlet . . . . .	112
5.2.2	Conditions aux limites de Neumann . . . . .	118
5.2.3	Coefficients variables . . . . .	125
5.2.4	Propriétés qualitatives . . . . .	129
5.3	Résolution d'autres modèles . . . . .	138
5.3.1	Système de l'élasticité linéarisée . . . . .	138
5.3.2	Équations de Stokes . . . . .	147

<b>6</b>	<b>MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS</b>	<b>151</b>
6.1	Approximation variationnelle . . . . .	151
6.1.1	Introduction . . . . .	151
6.1.2	Approximation interne générale . . . . .	152
6.1.3	Méthode de Galerkin . . . . .	155
6.1.4	Méthode des éléments finis (principes généraux) . . . . .	155
6.2	Éléments finis en dimension $N = 1$ . . . . .	156
6.2.1	Éléments finis $\mathbb{P}_1$ . . . . .	156
6.2.2	Convergence et estimation d'erreur . . . . .	161
6.2.3	Éléments finis $\mathbb{P}_2$ . . . . .	166
6.2.4	Propriétés qualitatives . . . . .	168
6.2.5	Éléments finis d'Hermite . . . . .	172
6.3	Éléments finis en dimension $N \geq 2$ . . . . .	174
6.3.1	Éléments finis triangulaires . . . . .	174
6.3.2	Convergence et estimation d'erreur . . . . .	186
6.3.3	Éléments finis rectangulaires . . . . .	194
6.3.4	Éléments finis pour Stokes . . . . .	199
6.3.5	Visualisation des résultats numériques . . . . .	205
<b>7</b>	<b>PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES</b>	<b>209</b>
7.1	Motivation et exemples . . . . .	209
7.1.1	Introduction . . . . .	209
7.1.2	Résolution des problèmes instationnaires . . . . .	210
7.2	Théorie spectrale . . . . .	213
7.2.1	Généralités . . . . .	213
7.2.2	Décomposition spectrale d'un opérateur compact . . . . .	215
7.3	Valeurs propres d'un problème elliptique . . . . .	217
7.3.1	Problème variationnel . . . . .	217
7.3.2	Valeurs propres du Laplacien . . . . .	222
7.3.3	Autres modèles . . . . .	226
7.4	Méthodes numériques . . . . .	229
7.4.1	Discrétisation par éléments finis . . . . .	229
7.4.2	Convergence et estimations d'erreur . . . . .	232
<b>8</b>	<b>PROBLÈMES D'ÉVOLUTION</b>	<b>235</b>
8.1	Motivation et exemples . . . . .	235
8.1.1	Introduction . . . . .	235
8.1.2	Modélisation et exemples d'équations paraboliques . . . . .	236
8.1.3	Modélisation et exemples d'équations hyperboliques . . . . .	237
8.2	Existence et unicité dans le cas parabolique . . . . .	238
8.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	238
8.2.2	Un résultat général . . . . .	240
8.2.3	Applications . . . . .	245
8.3	Existence et unicité dans le cas hyperbolique . . . . .	250

8.3.1	Formulation variationnelle . . . . .	250
8.3.2	Un résultat général . . . . .	251
8.3.3	Applications . . . . .	254
8.4	Propriétés qualitatives dans le cas parabolique . . . . .	257
8.4.1	Comportement asymptotique . . . . .	257
8.4.2	Principe du maximum . . . . .	259
8.4.3	Propagation à vitesse infinie . . . . .	260
8.4.4	Régularité et effet régularisant . . . . .	261
8.4.5	Équation de la chaleur dans tout l'espace . . . . .	263
8.5	Propriétés qualitatives dans le cas hyperbolique . . . . .	265
8.5.1	Réversibilité en temps . . . . .	265
8.5.2	Comportement asymptotique et équipartition de l'énergie . . . . .	266
8.5.3	Vitesse de propagation finie . . . . .	267
8.6	Méthodes numériques dans le cas parabolique . . . . .	271
8.6.1	Semi-discrétisation en espace . . . . .	271
8.6.2	Discrétisation totale en espace-temps . . . . .	272
8.7	Méthodes numériques dans le cas hyperbolique . . . . .	276
8.7.1	Semi-discrétisation en espace . . . . .	277
8.7.2	Discrétisation totale en espace-temps . . . . .	278
<b>9</b>	<b>INTRODUCTION À L'OPTIMISATION</b>	<b>283</b>
9.1	Motivation et exemples . . . . .	283
9.1.1	Introduction . . . . .	283
9.1.2	Exemples . . . . .	284
9.1.3	Définitions et notations . . . . .	290
9.1.4	Optimisation en dimension finie . . . . .	291
9.2	Existence d'un minimum en dimension infinie . . . . .	293
9.2.1	Exemples de non-existence . . . . .	293
9.2.2	Analyse convexe . . . . .	296
9.2.3	Résultats d'existence . . . . .	299
<b>10</b>	<b>CONDITIONS D'OPTIMALITÉ ET ALGORITHMES</b>	<b>303</b>
10.1	Généralités . . . . .	303
10.1.1	Introduction . . . . .	303
10.1.2	Différentiabilité . . . . .	304
10.2	Conditions d'optimalité . . . . .	309
10.2.1	Inéquations d'Euler et contraintes convexes . . . . .	309
10.2.2	Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	312
10.3	Point-selle, théorème de Kuhn et Tucker, dualité . . . . .	324
10.3.1	Point-selle . . . . .	324
10.3.2	Théorème de Kuhn et Tucker . . . . .	325
10.3.3	Dualité . . . . .	327
10.4	Applications . . . . .	330
10.4.1	Énergie duale ou complémentaire . . . . .	330

10.4.2	Commande optimale . . . . .	332
10.4.3	Optimisation des systèmes distribués . . . . .	337
10.5	Algorithmes numériques . . . . .	339
10.5.1	Introduction . . . . .	339
10.5.2	Algorithmes de type gradient (cas sans contraintes) . . . . .	340
10.5.3	Algorithmes de type gradient (cas avec contraintes) . . . . .	343
10.5.4	Méthode de Newton . . . . .	349
<b>11</b>	<b>MÉTHODES DE LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE</b>	
	<b>(Rédigé en collaboration avec Stéphane Gaubert)</b>	<b>353</b>
11.1	Introduction . . . . .	353
11.2	Programmation linéaire . . . . .	354
11.2.1	Définitions et propriétés . . . . .	354
11.2.2	Algorithme du simplexe . . . . .	359
11.2.3	Algorithmes de points intérieurs . . . . .	364
11.2.4	Dualité . . . . .	364
11.3	Polyèdres entiers . . . . .	368
11.3.1	Points extrémaux de compacts convexes . . . . .	368
11.3.2	Matrices totalement unimodulaires . . . . .	371
11.3.3	Problèmes de flots . . . . .	374
11.4	Programmation dynamique . . . . .	378
11.4.1	Principe d'optimalité de Bellman . . . . .	378
11.4.2	Problème en horizon fini . . . . .	379
11.4.3	Problème du chemin de coût minimum, ou d'arrêt optimal . . . . .	382
11.5	Algorithmes gloutons . . . . .	387
11.5.1	Généralités sur les méthodes gloutonnes . . . . .	387
11.5.2	Algorithme de Kruskal pour le problème de l'arbre couvrant de coût minimum . . . . .	387
11.6	Séparation et relaxation . . . . .	390
11.6.1	Séparation et évaluation (branch and bound) . . . . .	390
11.6.2	Relaxation de problèmes combinatoires . . . . .	395
	<b>ANNEXE : ESPACES DE HILBERT</b>	<b>405</b>
	<b>ANNEXE : ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE</b>	<b>411</b>
13.1	Résolution des systèmes linéaires . . . . .	411
13.1.1	Rappels sur les normes matricielles . . . . .	412
13.1.2	Conditionnement et stabilité . . . . .	415
13.1.3	Méthodes directes . . . . .	417
13.1.4	Méthodes itératives . . . . .	430
13.1.5	Méthode du gradient conjugué . . . . .	434
13.2	Calcul de valeurs et vecteurs propres . . . . .	442
13.2.1	Méthode de la puissance . . . . .	442
13.2.2	Méthode de Givens-Householder . . . . .	445

13.2.3 Méthode de Lanczos . . . . .	448
<b>Bibliographie</b>	<b>453</b>
<b>Index</b>	<b>456</b>
<b>Index des applications</b>	<b>460</b>
<b>Index des notations</b>	<b>461</b>