

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Remerciements	8
1.2	Avant-Propos	8
1.3	Phénomènes aléatoires	9
1.4	Deux idées majeures et incontournables	10
1.4.1	La loi des grands nombres	10
1.4.2	Conditionnement et Indépendance	11
1.5	Les variables aléatoires	11
1.5.1	Loi d'une variable aléatoire	11
1.5.2	Simulation de variables aléatoires	12
1.6	Historique	13
2	Espace de probabilité	17
2.1	Le langage des probabilités	17
2.1.1	Expériences et événements aléatoires	17
2.1.2	Probabilité - Premières propriétés	21
2.2	Probabilité sur un espace fini - Calcul combinatoire	23
2.2.1	Définition	23
2.2.2	Probabilité Uniforme	24
2.2.3	Modèles d'urnes	25
2.3	Définition générale des Probabilités	30
2.3.1	Pourquoi la définition précédente ne suffit-elle pas ?	30
2.3.2	Les ensembles dénombrables	30
2.3.3	Tribu	31
2.3.4	Définition d'une probabilité	33
2.3.5	Probabilités sur un espace dénombrable	36
2.4	Loi d'une variable aléatoire	37
2.5	Conditionnement et indépendance	39
2.5.1	Probabilités conditionnelles	39
2.5.2	Indépendance	42
2.5.3	Le Lemme de Borel-Cantelli	46
2.6	Exercices sur le chapitre 2	47

3	Espace fini ou dénombrable	51
3.1	Prérequis : quelques résultats utiles sur les séries	51
3.2	Variables aléatoires discrètes	53
3.3	Espérance des variables aléatoires discrètes	54
3.3.1	Définition	54
3.3.2	Propriétés de l'espérance des variables aléatoires discrètes . . .	56
3.3.3	Variance et écart-type	57
3.3.4	Un résultat fondamental - Moments d'une variable aléatoire	58
3.4	Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières	59
3.5	Variables aléatoires discrètes usuelles	61
3.5.1	Variable aléatoire de Bernoulli	61
3.5.2	Variable aléatoire binomiale	62
3.5.3	Probabilité de succès et variable aléatoire géométrique	64
3.5.4	Variable aléatoire de Poisson	65
3.6	Lois conditionnelles et indépendance	67
3.6.1	Lois conditionnelles	67
3.6.2	Espérance conditionnelle	69
3.6.3	Variables aléatoires indépendantes	71
3.6.4	Somme de variables aléatoires indépendantes	74
3.7	Exercices sur le chapitre 3	75
4	Variables aléatoires réelles et Vecteurs aléatoires	81
4.1	Les variables aléatoires réelles	81
4.2	Les lois de variables aléatoires réelles	83
4.2.1	Fonction de répartition	83
4.2.2	Variables aléatoires de loi à densité	87
4.2.3	Variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ et générateurs de nombres aléatoires	90
4.2.4	Simulation d'une variable aléatoire par inversion de la fonction de répartition	91
4.3	Espérance des variables aléatoires réelles	92
4.3.1	Définition	92
4.4	Variables aléatoires de carré intégrable	95
4.4.1	Variance et Covariance	95
4.4.2	Approximation linéaire	97
4.5	Calcul de l'espérance pour une variable aléatoire à densité	98
4.5.1	Un résultat général fondamental	98
4.5.2	Calculs d'espérances dans le cas avec densité	99
4.6	Exemples fondamentaux de variables à densité	100
4.6.1	Variable aléatoire uniforme sur $[a, b]$	100
4.6.2	Variable aléatoire exponentielle	101
4.6.3	Variable aléatoire de loi gamma	103

4.6.4	Variables aléatoires normales (ou variables gaussiennes)	104
4.7	Des inégalités fameuses	109
4.7.1	Inégalité de Bienaymé-Chebyshev	109
4.7.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz	110
4.7.3	Inégalité de Jensen	111
4.8	Vecteurs aléatoires	111
4.8.1	Vecteurs aléatoires	113
4.8.2	Moments d'un vecteur aléatoire	114
4.8.3	Densités marginales et conditionnelles	115
4.9	Variables aléatoires indépendantes	119
4.9.1	Indépendance de deux variables aléatoires	119
4.9.2	Suite de variables aléatoires indépendantes	120
4.10	Calculs de lois	123
4.10.1	Un théorème d'identification	123
4.10.2	Recherche de densité	123
4.11	Simulation de suites de variables aléatoires indépendantes	128
4.11.1	Inversion de la fonction de répartition	128
4.11.2	Méthode du rejet	129
4.12	Exercices sur le chapitre 4	131
5	Convergences et loi des grands nombres	137
5.1	Convergences de variables aléatoires	138
5.2	La loi des grands nombres	143
5.3	Méthode de Monte-Carlo	147
5.4	Exercices sur le chapitre 5	148
6	Fonctions caractéristiques et convergence en loi	153
6.1	La fonction caractéristique	153
6.1.1	Définition et premières propriétés	153
6.1.2	Exemples	155
6.1.3	Propriété fondamentale	157
6.1.4	Somme de vecteurs aléatoires indépendants	159
6.1.5	Fonction caractéristique et moments	160
6.2	Vecteurs gaussiens	160
6.3	Convergence en loi	164
6.4	Le théorème de la limite centrale	169
6.5	Intervalle de confiance	172
6.5.1	Sondages	172
6.5.2	Précision dans la méthode de Monte-Carlo	175
6.6	Exercices sur le chapitre 6	176
7	Modèles dynamiques aléatoires	181
7.1	Marche aléatoire	182
7.2	Processus de branchement	185

7.2.1	Somme aléatoire de variables aléatoires indépendantes	186
7.2.2	Processus de branchement	188
7.2.3	Percolation sur un arbre	193
7.3	Files d'attente	194
7.3.1	Un modèle simple en temps discret	195
7.3.2	Stabilité : étude analytique	196
7.4	Suites récurrentes aléatoires discrètes	200
7.4.1	Probabilités de transition	200
7.4.2	Stabilité	203
7.5	Exercices sur le chapitre 7	204
8	Corrections des exercices	209
8.1	Corrigés des exercices du chapitre 2	209
8.2	Corrigés des exercices du chapitre 3	214
8.3	Corrigés des exercices du chapitre 4	219
8.4	Corrigés des exercices du chapitre 5	225
8.5	Corrigés des exercices du chapitre 6	228
8.6	Corrigés des exercices du chapitre 7	232
9	Textes et corrigés d'examens	237
	Bibliographie	269
	Index	271