

Table des matières

Introduction : tour d’horizon des méthodes de Monte-Carlo	1
Un peu d’histoire : de l’aiguille Buffon à la neutronique	1
▷ Problématique 1 - Calcul d’intégrale : quadrature, méthodes de Monte-Carlo et Quasi Monte-Carlo	7
▷ Problématique 2 - Simulation de distribution complexe : algorithme de Metropolis-Hastings, échantillonneur de Gibbs	14
▷ Problématique 3 - Optimisation stochastique : algorithmes du recuit simulé et de Robbins-Monro	19
<u>Partie A : boîte à outils pour la simulation</u>	23
I Simulation de variables aléatoires	25
I.1 Générateur de nombres pseudo-aléatoires	25
I.2 Simulation de variable aléatoire unidimensionnelle	26
I.2.1 Inversion de la fonction de répartition	26
I.2.2 Variable gaussienne	29
I.3 Méthode de rejet	30
I.3.1 Simulation de loi conditionnelle	30
I.3.2 Simulation de loi (non conditionnelle) par méthode de rejet . .	30
I.4 Simulation d’un vecteur aléatoire	32
I.4.1 Le cas de vecteur gaussien	33
I.4.2 Modélisation de dépendance par les copules	34
II Convergences et estimations d’erreur	37
II.1 Loi des grands nombres	37
II.2 Théorème de la limite centrale et conséquences	39
II.2.1 Théorème de la limite centrale en dimension 1 et plus	39
II.2.2 Intervalles et régions de confiance asymptotiques	41
II.2.3 Application à l’évaluation de fonction de $\mathbb{E}(X)$	43

II.2.4	Applications au calcul de sensibilité d'espérance	48
II.3	Autres contrôles asymptotiques	51
II.3.1	Bornes de Berry-Essen et développements d'Edgeworth	51
II.3.2	Loi du log-itéré	51
II.3.3	Théorème de la limite centrale presque-sûr	52
II.4	Estimations non-asymptotiques	52
II.4.1	A propos des inégalités exponentielles	53
II.4.2	Inégalités de concentration dans le cas de variables aléatoires bornées	54
II.4.3	Inégalités de concentration uniformes	55
II.4.4	Inégalités de concentration dans le cas de bruit gaussien	61
III	Réduction de variance	69
III.1	Echantillonnage antithétique	69
III.2	Conditionnement et stratification	71
III.2.1	Technique de conditionnement	71
III.2.2	Technique de stratification	72
III.3	Variables de contrôle	74
III.3.1	Le principe	74
III.3.2	Choix optimal	74
III.4	Echantillonnage préférentiel	76
III.4.1	Changements de probabilité : notions de base et applications à la méthode de Monte-Carlo	76
III.4.2	Changements de probabilité par transformation affine	81
III.4.3	Changements de probabilité par transformation de Esscher	84
III.4.4	Méthodes adaptatives	87
	 Partie B : simulation de processus linéaires	 89
IV	Equations différentielles stochastiques et formules de Feynman-Kac	91
IV.1	Le mouvement brownien	92
IV.1.1	Un peu d'histoire	92
IV.1.2	Définition	93
IV.1.3	Simulation	97
IV.1.4	Equation de la chaleur	101
IV.1.5	Variation quadratique	104
IV.2	Intégrale stochastique et formule d'Itô	105
IV.2.1	Filtration et temps d'arrêt	105
IV.2.2	Intégrale stochastique et ses propriétés	106

IV.2.3	Processus d'Itô et formule d'Itô	108
IV.3	Equations différentielles stochastiques	109
IV.3.1	Définition, existence, unicité	109
IV.3.2	Propriété du flot et propriété de Markov	110
IV.3.3	Exemples	110
IV.4	Représentations probabilistes des équations aux dérivées partielles : formules de Feynman-Kac	113
IV.4.1	Générateur infinitésimal	113
IV.4.2	Equation aux dérivées partielles linéaire parabolique avec condi- tion de Cauchy	114
IV.4.3	Equation aux dérivées partielles linéaire elliptique	118
IV.4.4	Equation aux dérivées partielles linéaire parabolique avec condi- tion de Cauchy-Dirichlet	119
IV.4.5	Equation aux dérivées partielles linéaire elliptique avec condi- tion de Dirichlet	121
IV.5	Formules probabilistes pour les gradients	122
IV.5.1	Méthode de dérivation p.s.	122
IV.5.2	Méthode de vraisemblance	123
V	Schéma d'Euler pour les équations différentielles stochastiques	125
V.1	Définition et simulation	126
V.1.1	Définition comme processus d'Itô, moments quadratiques . . .	126
V.1.2	Simulation	128
V.1.3	Application au calcul d'espérance de diffusion : erreur de dis- crétisation et erreur statistique	129
V.2	Convergence au sens fort	131
V.3	Convergence au sens faible	133
V.3.1	Convergence d'ordre 1	133
V.3.2	Des extensions	136
V.4	Simulation de processus stoppé	137
V.4.1	Approximation discrète du temps de sortie	138
V.4.2	Méthode par pont brownien	140
V.4.3	Méthode par décalage de frontière	142
VI	Erreur statistique dans la simulation des équations différentielles stochastiques	145
VI.1	Analyse asymptotique : nombre de simulations et pas de temps	145
VI.2	Analyse non asymptotique de l'erreur statistique du schéma d'Euler .	147
VI.3	Méthode multi-niveaux	150
VI.4	Méthodes de réduction de variance	154

VI.4.1	Variables de contrôle	154
VI.4.2	Echantillonnage préférentiel	156
Partie C : simulation de processus non-linéaires		157
VII	Equations différentielles stochastiques rétrogrades	159
VII.1	Exemples	160
VII.1.1	Exemples venant des équations de réaction-diffusion	160
VII.1.2	Exemples venant des équations stochastiques	163
VII.2	Formules de Feynman-Kac	166
VII.2.1	Un résultat général	166
VII.2.2	Modèle jouet	168
VII.3	Discrétisation en temps et équation de programmation dynamique . .	171
VII.3.1	Discrétisation du problème	171
VII.3.2	Analyse d'erreur	172
VII.4	Autres équations de programmation dynamique	174
VII.5	Une autre représentation probabiliste via les processus de branchement	176
VIII	Simulation par régression empirique	179
VIII.1	Les difficultés d'une approche naïve	179
VIII.2	Approximation d'espérances conditionnelles par méthodes de moindres carrés	182
VIII.2.1	Régression empirique	182
VIII.2.2	Méthode SVD	184
VIII.2.3	Exemple d'espace d'approximation : les polynômes locaux . .	186
VIII.2.4	Estimations d'erreur robustes en le modèle	187
VIII.2.5	Réglages des paramètres dans le cas de polynômes locaux . .	189
VIII.2.6	Preuve des estimations d'erreur	190
VIII.3	Application à la résolution de l'équation de programmation dyna- mique par régression empirique	192
VIII.3.1	Echantillon d'apprentissage et espaces d'approximation . . .	193
VIII.3.2	Calculs des fonctions de régression empirique	193
VIII.3.3	Equation de propagation d'erreur	195
VIII.3.4	Réglage optimal des paramètres de convergence dans le cas de polynômes locaux	200
IX	Particules en interactions et équations non-linéaires au sens de McKean	203
IX.1	Heuristiques	203
IX.1.1	Echelles macroscopique versus microscopique	203

IX.1.2 Exemples, applications	205
IX.2 Existence et unicité de la diffusion non-linéaire	207
IX.3 Convergence du système de diffusions en interaction, propagation du chaos, simulation	208
<u>Appendices</u>	213
A Annexe : quelques rappels et résultats complémentaires	213
A.1 A propos des convergences	213
A.1.1 Convergence p.s., en probabilité et dans L_1	213
A.1.2 Convergence en loi	214
A.2 Quelques inégalités utiles	215
A.2.1 Inégalités sur les moments	215
A.2.2 Inégalités sur les probabilités de déviation	217
Table des figures	219
Table des algorithmes	221
Bibliographie	223
Index	232