

Préface

1. Le projet de l'ouvrage

Cet ouvrage synthétise plusieurs recherches concernant l'usage de certaines structures géométriques dans les neurosciences de la vision. Il élargit notre cours d'*Introduction aux Sciences cognitives* de l'Ecole Polytechnique. En relation étroite avec un vaste ensemble de données expérimentales, il expose plusieurs modèles physico-mathématiques du cortex visuel primaire – essentiellement l'aire V1, la première des aires corticales visuelles – et propose un modèle géométrique original de son architecture fonctionnelle, c'est-à-dire de l'organisation très spécifique de ses connexions neuronales.

Son propos est d'explicitier les algorithmes géométriques que cette architecture fonctionnelle implémente. Il concerne donc en définitive l'origine neuronale des représentations spatiales et c'est pourquoi nous avons proposé le néologisme de *neurogéométrie* pour qualifier son domaine d'investigation.

Dans la mesure où l'origine des représentations spatiales constitue un problème majeur non seulement sur le plan scientifique mais aussi sur le plan philosophique, cet ouvrage possède également, surtout dans ses derniers chapitres, une forte dimension épistémologique. En fait, dit brièvement, il vise à montrer que la géométrie immanente aux infrastructures neuronales de l'espace permet de clarifier ce que l'on appelle en philosophie transcendantale le caractère “synthétique a priori” de cet espace.

2. Le plan de l'ouvrage

Après une introduction générale portant sur les sciences cognitives et sur la façon dont la neurogéométrie de la vision s'y insère, nous consacrons les deux premiers chapitres à des données expérimentales de neurophysiologie ainsi qu'à un premier niveau de modélisation.

Dans le premier chapitre, nous traitons des champs et des profils récepteurs des neurones visuels et expliquons comment ils agissent sur le signal optique comme des filtres. Le traitement qu'ils effectuent est analogue à ce que l'on appelle en théorie du signal une *analyse en ondelettes*.

Dans le chapitre 2, nous présentons un ensemble de données expérimentales sur l'architecture fonctionnelle de l'aire V1 et, en particulier, sur ce que l'on appelle sa structure en “*pinwheels*” (roues d'orientation). Si l'on simplifie leur activité très compliquée, on peut dire que la majorité des neurones de V1 détectent en première approximation des positions et des orientations dans le champ visuel, ceux détectant les diverses orientations pour une position donnée se regroupant en micromodules fonctionnels anatomiquement définissables appelés des hypercolonnes d'orientation ou “*pinwheels*”. En ce sens, V1 implémente la fibration $R \times \mathbb{P}^1$ ayant pour base

le plan rétinien R et pour fibre la droite projective \mathbb{P}^1 des orientations du plan. Les hypercolonnes sont reliées entre elles par des connexions cortico-corticales reliant des neurones détectant *l'alignement* d'orientations parallèles en des positions différentes. Nous montrons que, en première approximation, ce *transport parallèle* peut être considéré comme une implémentation de ce que l'on appelle en géométrie différentielle la *structure de contact* du fibré V des 1-jets de courbes dans le plan R . Ce fibré est un espace \mathbb{R}^3 de coordonnées (x, y, p) , (x, y) étant les coordonnées spatiales et p la coordonnée angulaire $\tan(\theta)$. Nous exposons également la façon dont la fibration modélisant la variable d'orientation interfère avec d'autres fibrations modélisant d'autres variables comme la dominance oculaire, la phase ou la fréquence spatiales.

Dans le chapitre 3, nous ouvrons une partie "géométrique" et précisons d'abord le modèle géométrique fourni par la structure de contact sur V en insistant sur son invariance sous l'action du groupe $E(2)$ des déplacements du plan euclidien. La structure de contact est le champ de plans \mathcal{C} engendré par l'application de $E(2)$ au plan C_0 des (x, p) à l'origine. Comme C_0 est le plan $y = 0$ noyau de la 1-forme différentielle dy , \mathcal{C} est donc le noyau de la 1-forme différentielle $\omega = dy - p dx$ obtenue en translatant dy par $E(2)$. La définition d'une métrique $E(2)$ -invariante sur ces plans définit ce que l'on appelle une géométrie *sous-riemannienne*. Nous montrons ainsi que le cadre mathématique naturel de la modélisation de certaines architectures fonctionnelles de la vision est fourni par la géométrie de contact, la géométrie symplectique qui lui est étroitement associée et la géométrie sous-riemannienne.

Dans le chapitre 4, nous développons une première application concernant le mécanisme, longtemps considéré comme énigmatique, de l'intégration des contours dans le cortex visuel primaire. Nous montrons que les expériences de psychophysique, désormais classiques et confirmées par de nombreuses expériences neurophysiologiques complémentaires, sur ce passage de données locales à des Gestalts globales, expériences interprétées aujourd'hui par les spécialistes en termes d'une structure appelée *champ d'association*, constituent une preuve expérimentale du fait que l'architecture fonctionnelle de $V1$ implémente la structure de contact de la fibration V .

Dans le chapitre 5, l'un des plus longs et des plus techniques de l'ouvrage, nous présentons une seconde application à un phénomène encore beaucoup plus énigmatique que celui de l'intégration des contours, à savoir la construction par le système visuel de contours illusoire à très longue portée. Ces phénomènes de complétion de données sensorielles lacunaires par les mécanismes intégratifs de la perception sont connus depuis le début de la théorie de la Gestalt et ont donné lieu, en particulier depuis les célèbres travaux de Gaetano Kanizsa, à d'innombrables recherches. Avec notre collègue Jacques Ninio de l'Ecole Normale Supérieure, nous avons mené des expériences sur les contours illusoire avec courbure pour tester le type de courbes que l'on observe. En ce qui concerne les modèles, on est naturellement conduit à des modèles *variationnels*. David Mumford a proposé à la fin des années 80 un premier modèle défini dans le plan R du champ visuel et minimisant la courbure totale. Nous proposons quant à nous un modèle dans le fibré de contact V qui repose sur l'hypothèse que les contours illusoire sont des *géodésiques sous-riemanniennes*.

Cela nous conduit à analyser les problèmes variationnels sur le groupe $E(2)$ et, en particulier, celui des géodésiques sous-riemanniennes associées à sa structure de contact. En ce qui concerne le premier problème, nous suivons les propositions de Robert Bryant et Phillip Griffiths puis, dans le chapitre 6, en ce qui concerne le

second, celles d'Andrei Agrachev. Le modèle géodésique sous-riemannien le plus simple est dérivable de la structure de groupe naturelle de V qui est isomorphe à celle du *groupe de Heisenberg* \mathbb{H} bien connu des physiciens. Ce groupe est un groupe nilpotent appartenant à la classe de ce que l'on appelle les groupes de Carnot dont la géométrie sous-riemannienne, aussi dite de Carnot-Carathéodory, a été profondément développée par Misha Gromov et, à sa suite, par des géomètres comme Pierre Pansu et André Belaïche.

Pour le groupe de Heisenberg \mathbb{H} , grâce aux travaux de Richard Beals, Bernard Gaveau, Peter Greiner, Andrei Agrachev et d'autres, on connaît bien la géométrie sous-riemannienne (géodésiques, sphère, front d'onde, caustique et cut locus, points conjugués, etc.). Toutefois, le modèle le plus naturel n'est pas celui sur V mais celui sur $E(2)$. Or, ce dernier groupe, dit aussi groupe des roto-translations ou "shift-twist action", n'est pas nilpotent. Sa "nilpotentisation" qui définit son "cône tangent" à l'origine est bien isomorphe au groupe de Heisenberg \mathbb{H} , mais, globalement, sa géométrie sous-riemannienne est très différente. Nous avons constaté avec étonnement qu'elle n'était pas connue jusqu'ici bien que $E(2)$ soit pourtant un groupe classique et élémentaire. À la suite de discussions, Andrei Agrachev et ses collaborateurs (en particulier Igor Moiseev) ont explicité cette géométrie. Nous exposons leurs résultats.

Pour clore cette partie consacrée aux modèles géométriques, nous revenons dans le chapitre 7 sur le fait que les géométries de contact et sous-riemanniennes modélisent ici une architecture fonctionnelle de connexions entre des neurones qui agissent comme des filtres. Cela signifie que le cadre mathématique naturel de la perception visuelle de bas niveau est celui où *l'analyse harmonique* sur le groupe $E(2)$ se mêle à sa géométrie sous-riemannienne. Comme l'analyse harmonique s'effectue à travers une ondelette "mère" translatée par $E(2)$, c'est-à-dire par ce que l'on appelle un *état cohérent*, c'est donc le lien entre états cohérents et géométrie sous-riemannienne qui s'impose comme cadre théorique de la vision de bas niveau.

Avec le chapitre 8 nous commençons une partie plus axée sur les modèles *physiques* de $V1$. Dans les chapitres précédents, c'était la structure géométrique de l'architecture fonctionnelle qui se trouvait au cœur de l'analyse. Elle connecte toutefois des neurones qui sont des unités dynamiques possédant des états internes et interagissant entre elles à travers des couplages appelés "poids synaptiques". Nous faisons d'abord quelques rappels sur les équations de type Hodgkin-Huxley décrivant la dynamique des potentiels d'action émis par les neurones individuels. Nous faisons ensuite quelques autres rappels sur les *réseaux de neurones*, les équations de Hopfield et le transfert à de tels réseaux des modèles de physique statistique de type "verres de spins". Nous présentons ensuite de façon un peu plus détaillée la théorie de la *synchronisation* des réseaux d'oscillateurs.

Dans le chapitre 9, nous résumons un ensemble de travaux remarquables effectués par Bard Ermentrout, Jack Cowan, Paul Bressloff et Martin Golubitsky à propos de la dynamique de réseaux de Hopfield dont les poids synaptiques encodent l'architecture fonctionnelle de $V1$. Ces auteurs ont montré en particulier que, sous l'action d'une auto-excitation de $V1$, même en l'absence de tout stimulus, l'état de base du réseau peut *bifurquer* spontanément vers des états correspondant à des patterns perceptifs possédant une géométrie bien précise. Plusieurs de ces patterns ont été observés depuis longtemps dans les hallucinations.

Dans le chapitre 10, nous exposons notre travail avec Alessandro Sarti et Giovanna Citti de l'Université de Bologne qui montre en particulier comment, par introduction du paramètre *d'échelle* (réalisé concrètement par la largeur des filtres neuronaux), on passe naturellement de la structure de contact de la fibration V à une structure *symplectique* définie sur $V \times \mathbb{R}$ qui en est la "symplectisée". Comme dans toute structure symplectique, une structure de type "optique géométrique" se trouve ainsi définie et, lorsque l'on traite de cette façon une forme délimitée par un contour fermé du plan visuel R , on obtient le *cut locus* – ou "squelette", ou encore "axe de symétrie généralisé" – de la forme qui, comme on le sait depuis les travaux fondamentaux d'Harry Blum, joue un rôle essentiel dans l'analyse perceptive des formes.

Dans le chapitre 11, nous complétons l'ensemble de ces recherches sur la neurogéométrie de la perception visuelle. Nous expliquons d'abord les bases de la géométrie différentielle multi-échelle ("*scale space analysis*") dont le traitement du signal optique par des neurones agissant comme des filtres par convolution impose la prise en considération. Puis nous traitons à titre d'exemple la reprise de la *théorie des singularités* à la Thom-Mather effectuée dans ce cadre multi-échelle par James Damon. Nous introduisons ensuite les algorithmes de *segmentation* des images. Il y en existe deux classes étroitement liées entre elles. La première est celle des modèles où la segmentation se fait en appliquant des équations de diffusion non linéaires et anisotropes qui homogénéisent les régions où le signal varie peu et au contraire introduisent des discontinuités nettes là où le signal varie beaucoup. La seconde classe est celle des modèles variationnels introduits par David Mumford et Jayant Shah. Nous résumons à leur propos les travaux d'Alessandro Sarti et Giovanna Citti qui montrent que le modèle de Mumford-Shah est une limite (au sens des modèles variationnels) d'un modèle de synchronisation d'oscillateurs.

Dans les deux derniers chapitres, nous abordons des problèmes épistémologiques allant de la phénoménologie de la perception (au sens de Husserl et Merleau-Ponty) au problème kantien de l'esthétique transcendantale.

Dans le chapitre 12, nous montrons d'abord comment la possibilité d'engendrer la morphologie et la géométrie globales des percepts à partir d'une mésophysique neuronale confirme une conception émergentiste strictement naturaliste de la conscience perceptive et invalide certaines affirmations de nombreux philosophes sur l'irréductibilité de la conscience aux activités neuronales.

Dans le chapitre 13, nous montrons enfin comment la neurogéométrie et le matérialisme neuronal corrélatif permettent de naturaliser les approches philosophiques les plus profondes de la perception et de l'espace, à savoir les approches *transcendantales*. Nous commençons par la *phénoménologie* de la perception telle que l'a développée Husserl et nous soulignons son extrême proximité avec les modélisations neurogéométriques exposées aux chapitres précédents. Puis nous concluons par une reprise de l'*esthétique transcendantale* kantienne et de la thèse du caractère *synthétique a priori* de l'espace pour montrer que toutes les données neurophysiologiques et tous les modèles que nous avons présentés en confirment le bien fondé. Cette affirmation est, selon nous, le principal apport philosophique de l'ouvrage et possède sans doute une certaine portée si l'on songe que l'ensemble de la philosophie cognitive "rigoureuse" s'est construite depuis plus d'un siècle sur la démotion de l'esthétique transcendantale et la promotion des conceptions logico-conceptuelles du mental. La neurogéométrie montre au contraire que l'espace est bien une "intuition pure", c'est-à-dire un *format*

non conceptuel, anté-prédictif et pré-judicatif pour les données sensorielles, que ce format est défini par les architectures fonctionnelles des aires visuelles primaires et que, dans la mesure où celles-ci sont des produits de l'évolution, elles sont innées et a priori pour les contenus et les jugements perceptuels. Ces derniers ne peuvent donc pas être purement conceptuels et l'opposition kantienne entre intuition et concept se trouve ainsi confirmée par une neurogéométrie immanente mathématisant l'idéalité transcendantale de l'espace.

CHAPITRE 1

Champs récepteurs et analyse en ondelettes

2. CHAMPS RÉCEPTEURS ET PROFILS RÉCEPTEURS

49

Disons maintenant quelques mots de la structure des profils récepteurs. Des méthodes raffinées d'électrophysiologie (cf. par exemple DeAngelis et al. [76]) ont permis de mesurer les lignes de niveau des RPs de différents neurones visuels. On commence par utiliser des gratings sinusoidaux de bandes claires et sombres et, en variant les largeurs des bandes, leur fréquence spatiale, leur orientation, leur vitesse de déplacement, leur fréquence temporelle et leur taille, on définit avec précision la

localisation, la taille et l'orientation préférentielle du RF. Puis on utilise des séquences de flashes (par ex. 50ms) rapides et aléatoires, spots ponctuels et petites barres, placés sur une grille (par ex. 20×20) séparés par des intervalles d'environ 100ms-1s ("white noise analysis"). On obtient ainsi quelques milliers de spikes. La corrélation, avec éventuellement un paramètre temporel de délai, entre l'input (les flashes) et l'output (les potentiels d'action), fournit la fonction de transfert du neurone. Il s'agit là d'un tour de force expérimental dont les résultats sont tout à fait remarquables.

Nous considérerons essentiellement deux grands types de RPs. D'abord, c'est un résultat classique de neurophysiologie, déjà fortement souligné par David Marr à la fin des années 70, que les RFs des cellules ganglionnaires de la rétine ont des RPs en laplaciens de gaussiennes ΔG . Il en va de même pour les cellules du corps genouillé latéral (cf. figures 14, 15 et 16).

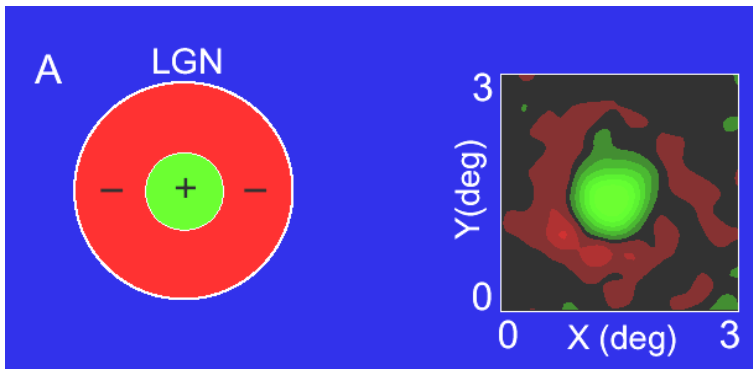


FIG. 14. Le profil récepteur d'une cellule du corps genouillé latéral *ON-center*. À gauche : schéma du RP avec les domaines + (*ON*) en vert et - (*OFF*) en rouge. À droite : enregistrement des lignes de niveau du RP. (D'après DeAngelis et al. [76]).

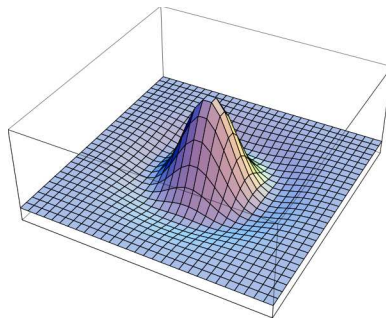


FIG. 15. Le modèle en laplacien de gaussienne ΔG d'une cellule ganglionnaire et d'une cellule du corps genouillé latéral *ON-center*.

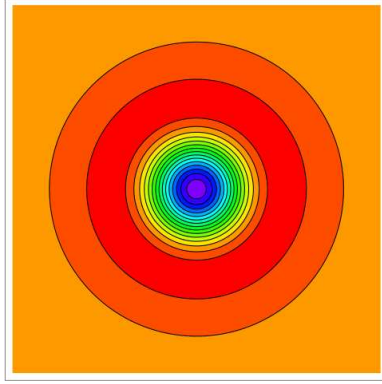


FIG. 16. Fit des courbes de niveau de ΔG avec les résultats empiriques de la figure 14.

Passons de la rétine et du CGL à $V1$. Les profils récepteurs de neurones simples de $V1$ les plus communément rencontrés sont constitués d'un domaine ON allongé dans une direction préférentielle flanqué de deux domaines OFF plus petits. On peut en donner un modèle idéalisé en dérivée seconde de gaussienne $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ (cf. figure 17).

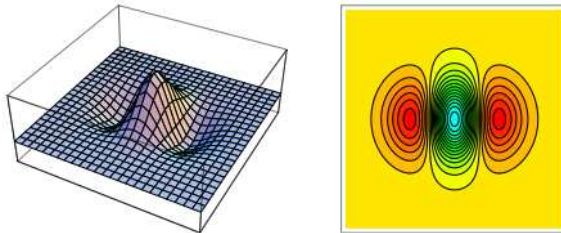


FIG. 17. Profil récepteur standard d'un neurone simple de $V1$.

Toutefois, les données expérimentales ne pouvant pas être d'une très grande précision, ils peuvent aussi être interprétés comme des ondelettes de Gabor. La figure 18 compare le modèle en dérivée seconde de gaussienne $\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ (avec $G = \exp(-(x^2 + y^2))$) avec le modèle en ondelette de Gabor $\varphi(x, y) = \exp(i2x) \exp(-(x^2 + y^2))$ (partie réelle).

Il existe différents schémas neurophysiologiques de la sélectivité à l'orientation des neurones de $V1$. Ils utilisent différentes combinaisons de signaux feedforward thalamiques et de feedbacks intracorticaux ainsi que différents effets de connexions à courte portée excitatrices et inhibitrices (cf. par exemple Miller et al. [219], Carandini et al. [53], Bar et al. [21], Shelley et al. [296]). Mais même si les mécanismes de base restent en discussion, il est quand même clair que les connexions intracorticales sélectionnent une orientation préférentielle et éliminent les autres.

On rencontre d'autres RPs. La figure 19, due au groupe de Gregory DeAngelis à Berkeley, présente par exemple le RP d'un neurone simple de $V1$ constitué

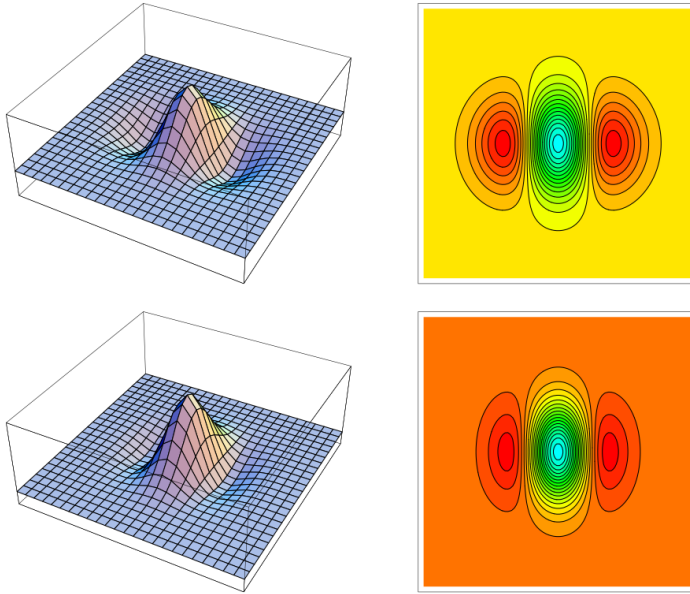


FIG. 18. Modèles en dérivée seconde de gaussienne $\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ ($G = \exp(-(x^2 + y^2))$) et en ondelette de Gabor $\varphi(x, y) = \exp(i2x) \exp(-(x^2 + y^2))$ (partie réelle) d'un profil récepteur standard d'un neurone simple de V1.

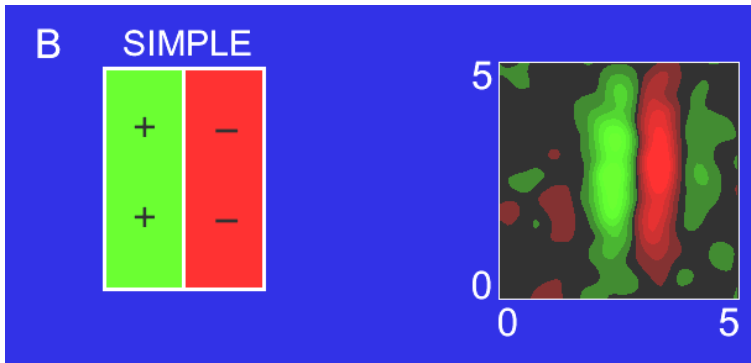


FIG. 19. Autre profil récepteur d'un neurone simple de V1. À gauche, schéma de la structure du RP avec les lobes + (*ON*) et - (*OFF*). À gauche, enregistrement des lignes de niveau. (D'après DeAngelis et al. [76]).

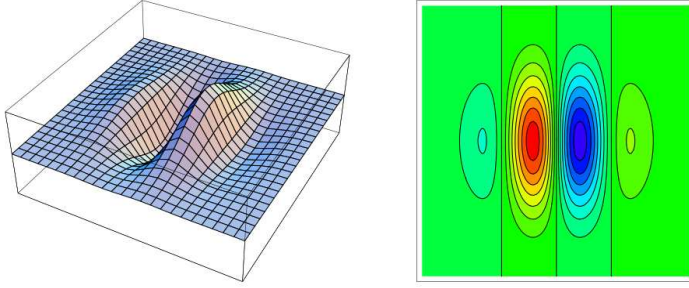


FIG. 20. Modèle du RP d'un neurone simple de V1 avec une dérivée troisième $\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}$ de gaussienne.

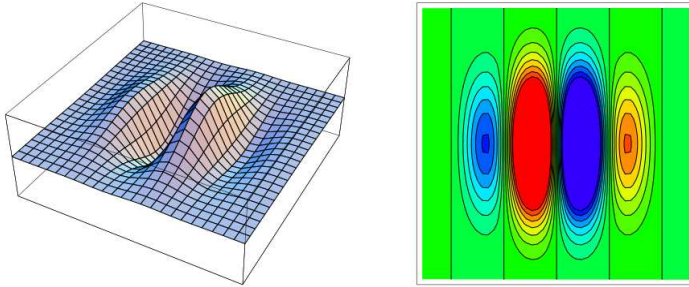


FIG. 21. Modèle du RP d'un neurone simple de V1 avec une ondelette de Gabor.

de deux domaines symétriques *ON/OFF* allongés dans une direction préférentielle et flanqués de domaines plus petits respectivement *OFF* et *ON*. Les figures 20 et 21 en donnent deux modèles : un modèle en dérivée troisième de gaussienne $\varphi(x, y) = \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}$ ($G = \exp(-(x^2 + y^2))$) et un modèle en ondelette de Gabor $\varphi(x, y) = \exp(i4x) \exp(-(x^2 + y^2))$ (partie imaginaire).

Il existe aussi dans V1 des neurones dits complexes qui n'ont pas d'orientation préférentielle. Par ailleurs, si l'on introduit le délai de corrélation comme variable temporelle t , on trouve également des profils récepteurs en dérivées troisièmes de gaussienne (cf. figures 22 et 23).

L'exemple ci-dessus est un cas de *séparabilité* espace / temps, ce qui signifie que les régions *ON/OFF* du RP ne changent pas de position mais seulement d'intensité, celle-ci étant uniformément modulée par un profil temporel. Autrement dit, le profil récepteur *spatio-temporel* $\varphi(x, y, t)$ est un produit de la forme $\varphi(x, y, t) = \varphi(x, y)\psi(t)$. Souvent $\psi(t)$ est "diphase" c'est-à-dire en dérivée première de gaussienne et l'on obtient des profils comme ci-dessus en $\frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial t}$. Mais il existe aussi des cas monophasiques $\psi(t) = G$ et des cas triphasiques $\psi(t) = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$, ce qui donne des dérivées quatrièmes de gaussiennes $\frac{\partial^4 G}{\partial x^2 \partial t^2}$.

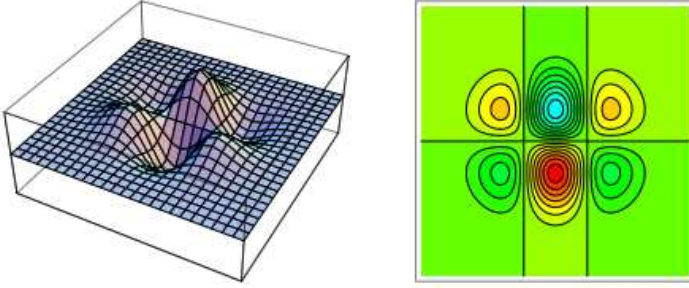


FIG. 22. Profil récepteur en $\frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial t}$ sur le plan (x, t) (y varie de façon gaussienne).

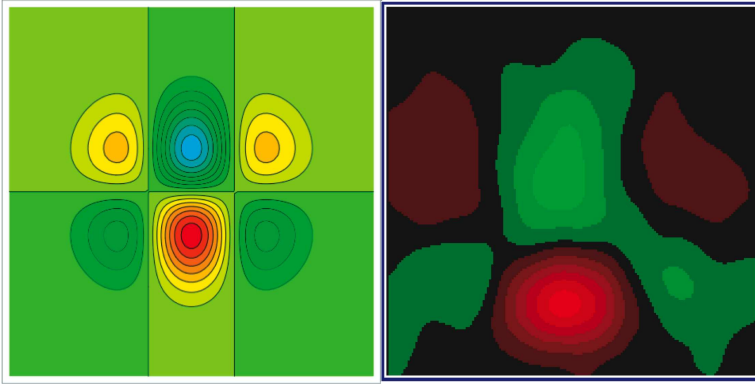


FIG. 23. Les lignes de niveau empiriques d'un profil récepteur en $\frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial t}$ sur le plan (x, t) . L'abscisse est spatiale (coordonnée x) et l'ordonnée temporelle, de 0 à 200 ms (délai).

Le fit entre les modèles et les données expérimentales va très loin. Par exemple, il existe des neurones où le profil spatial et le profil temporel ne sont pas séparables. Lorsqu'il y a non séparabilité, les régions *ON/OFF* se déplacent et cela permet au neurone d'avoir une sélectivité au mouvement et de détecter les vitesses de bords en mouvement. La figure 24 reprise de DeAngelis et al. [76] montre une telle dynamique de profil récepteur non séparable. On y voit l'évolution du profil récepteur d'un neurone de ce type au cours du temps. La figure 25 en montre un modèle en dérivées de gaussienne. Il s'agit d'un modèle en dérivée troisième $\frac{\partial^3 G}{\partial u^2 \partial v}$, le plan (x, t) étant obtenu par rotation du plan (u, v) de $\frac{\pi}{10}$. L'accord est remarquable.

3. Profils récepteurs : ondelettes de Gabor et dérivées de gaussiennes

Il existe de nombreuses discussions sur la forme exacte des RPs. Ce sont John Daugman [73] puis J.P. Jones et L.A. Palmer [156] qui ont les premiers montré, à partir de données empiriques fines et précises, que les champs et profils récepteurs des neurones visuels (par exemple le cortex strié, aire 17 ou V1, du chat) étaient

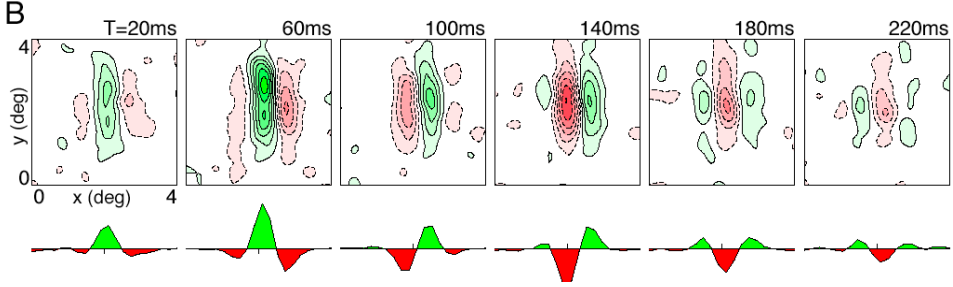


FIG. 24. Évolution temporelle d'un profil récepteur $\varphi(x, y, t)$ non séparable de $t = 20\text{ms}$ à $t = 220\text{ms}$. L'organisation spatiale du profil récepteur change, ce qui n'est pas le cas pour les profils récepteurs séparables. En haut le profil spatial $\varphi_t(x, y) = \varphi(x, y, t)$. En bas sa section pour $y = 0$. (D'après DeAngelis et al. [76]).

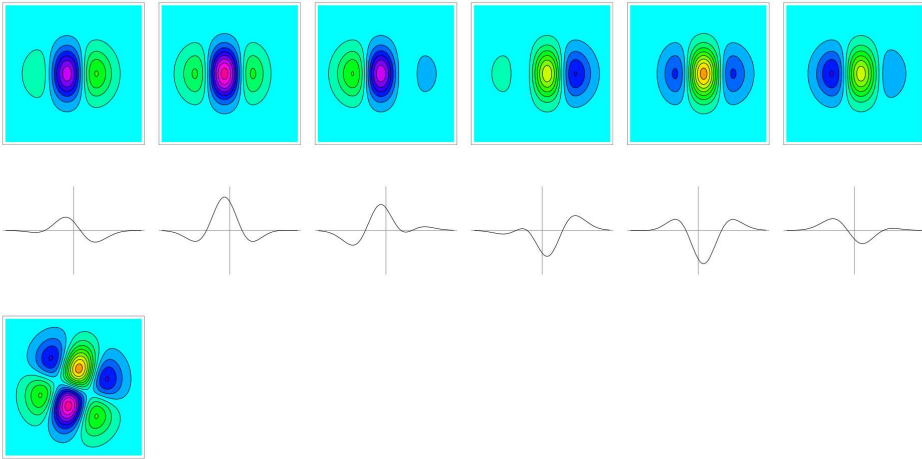


FIG. 25. Modèle en dérivée de gaussienne de l'évolution temporelle du profil récepteur $\varphi(x, y, t)$ de la figure 24. On a pris $\varphi(x, y, t) = \frac{\partial^3 G}{\partial u^2 \partial v}(u, y, v)$ avec la rotation $(u, v) = r_\theta(x, t)$ et $\theta = \frac{\pi}{10}$. En haut, l'évolution du profil spatial $\varphi_t(x, y) = \varphi(x, y, t)$. Au milieu, les sections pour $y = 0$. En bas, le profil récepteur $\varphi(x, 0, t)$ sur le plan (x, t) pour $y = 0$.

approximables par des filtres de Gabor, c'est-à-dire par des fonctions trigonométriques modulées par une gaussienne :

“The Gabor function provides a useful and reasonably accurate description of most spatial aspects of simple receptive fields.”
(Jones, Palmer [156], p. 1233)

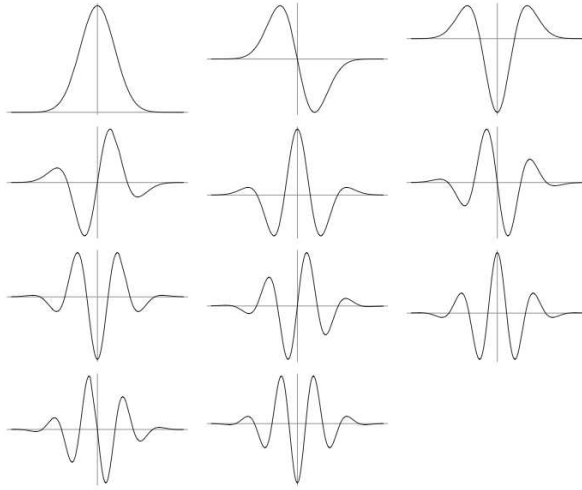


FIG. 26. Table des dérivées successives d'une gaussienne en dimension 1. On voit comment la fréquence spatiale se trouve liée à l'ordre de dérivation.

L'intérêt de traiter les RPs comme des patches de Gabor est double. D'abord on peut faire varier continûment le rapport entre l'échelle (la largeur de la gaussienne) et la fréquence spatiale, ainsi que le facteur de phase. Ensuite, on obtient des ondelettes associées aux transformées de Fourier avec fenêtrage qui sont bien adaptées à l'*analyse harmonique* sur les groupes de Lie (type groupe de Heisenberg) qui interviennent dans les modèles d'architecture fonctionnelle que nous rencontrerons dans les prochains chapitres.

Mais prendre des modèles en dérivées partielles de gaussiennes est aussi fort intéressant. On obtient également le facteur d'échelle et le facteur de phase, mais la fréquence spatiale est maintenant liée à l'ordre de dérivation et se trouve donc plus fortement contrainte (cf. figure 26).

En dimension 1, les dérivées de gaussiennes $\frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right)$ sont données par la formule

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) = H_{n,\sigma}(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

où $H_{n,\sigma}(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \right)^n H_n \left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} \right)$, H_n étant le n -ème polynôme d'Hermite. Il est intéressant de comparer les Gabor et les dérivées de gaussiennes en tant que profils récepteurs dont la fonction serait de minimiser les relations d'incertitude de Heisenberg (cf. par exemple Bloom-Reed [33]). C'est sans doute Richard Young qui a le mieux analysé l'intérêt théorique et la supériorité empirique de ces modèles. Le lecteur pourra se référer avec profit à Young [344] et [345] où, à la suite de Jan Koenderink, l'auteur insiste sur le fait que

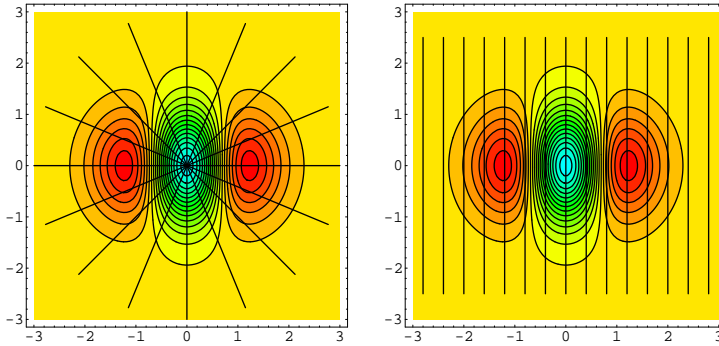


FIG. 27. Fine barre tournant et se translatant dans le champ récepteur d'un neurone simple de V1.

“The initial stage of processing of receptive fields in the visual cortex approximates a ‘derivative analyzer’ that is capable of estimating the local spatial and temporal directional derivatives of the intensity profile in the visual environment.”

4. Les neurones visuels comme opérateurs de convolution

Le grand intérêt des modèles de profils récepteurs en dérivées de gaussiennes est de permettre de faire de la *géométrie différentielle multi-échelle* sur les signaux optiques, qui sont pourtant des données très bruitées fortement non différentiables. Soient en effet $I(x, y)$ l'intensité du signal optique défini sur le domaine R de la rétine et $\varphi(x, y)$ le RP, centré sur 0 (le centre de R), d'un RF d'un certain type de neurone visuel. Si le RF est centré en (x_0, y_0) , le RP est $\varphi(x - x_0, y - y_0)$ et, le neurone visuel agissant en première approximation comme un filtre linéaire sur le signal optique, sa réponse a pour valeur la moyenne du signal pondérée par φ soit l'intégrale :

$$I_\varphi(x_0, y_0) = \int_D I(x', y') \varphi(x' - x_0, y' - y_0) dx' dy' .$$

C'est la *mesure* du signal I en (x_0, y_0) .

Par exemple, si l'on considère un profil récepteur en dérivée seconde de gaussienne comme à la figure 17, on peut considérer la mesure qu'il fournit d'un stimulus en forme de fine barre lorsque celle-ci tourne et se translate comme dans la figure 27.

La figure 28 montre que lors d'une rotation la réponse possède un maximum lorsque la barre est alignée avec l'orientation préférentielle du champ récepteur, puis décroît et s'annule quasiment lorsque la barre est perpendiculaire à cette orientation. La figure 29 montre quant à elle que lorsque la barre se déplace parallèlement à cette orientation préférentielle, la réponse est positive maximale lorsque la barre est centrée sur le lobe ON et négative minimale lorsqu'elle est centrée sur les lobes OFF . Tout cela est intuitif.

Si maintenant un *champ* de RFs de profils identiques recouvre la rétine R et mesure le signal optique en parallèle, alors, dans la limite continue où il existe un RF

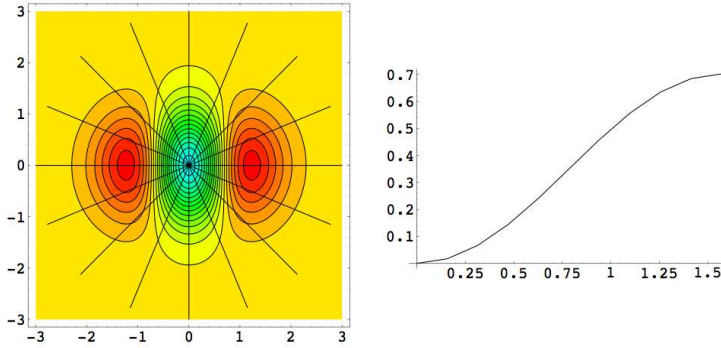


FIG. 28. Lors d'une rotation, la réponse du neurone simple de V1 possède un maximum lorsque le stimulus-barre est aligné avec l'orientation préférentielle du champ récepteur. Elle décroît et devient négligeable lorsque la barre est perpendiculaire à cette orientation.

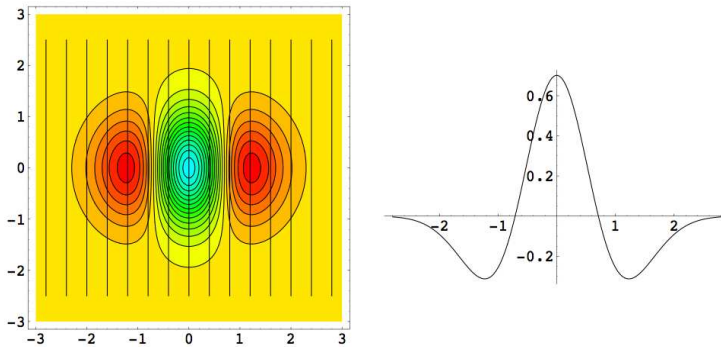


FIG. 29. Lorsque le stimulus-barre se déplace parallèlement à l'orientation préférentielle du neurone simple de V1, la réponse est positive maximale lorsqu'il est centré sur le lobe ON et négative minimale lorsqu'il est centré sur les lobes OFF.

pour chaque position (x, y) dans R , la réponse de ce champ global est la *convolution* de I par φ :

$$I_\varphi(x, y) = \int_D I(x', y') \varphi(x' - x, y' - y) dx' dy' = (I * \varphi)(x, y) .$$

Comme l'a proposé Luc Florack [100], un disciple de Jan Koenderink, une bonne façon de voir les choses est de traiter le signal I (qui est une "mauvaise" fonction, très bruitée) comme une *distribution* au sens de Schwartz, c'est-à-dire une fonctionnelle linéaire continue $\langle I | \varphi \rangle$ sur un espace de fonctions test (fonctions C^∞ à support compact, ou à décroissance rapide pour les distributions tempérées) et de traiter les RPs

$\varphi(x - x_0, y - y_0)$ – qui sont des fonctions bien régulières et bien localisées – comme des classes de fonctions test *neuralement câblées* dans le système visuel. La mesure du signal I par un neurone de RP φ en fournit alors la représentation $\langle I | \varphi \rangle$ au sens des distributions.

Or l'on sait que la distribution de Dirac δ constitue l'opérateur de base pour le calcul différentiel des distributions puisque pour toute distribution T :

$$\delta * T = T, \delta' * T = T', \delta^{(m)} * T = T^{(m)}$$

(où $T^{(m)}$ est la m -ième dérivée de T) et plus généralement :

$$D\delta * T = DT$$

pour tout opérateur différentiel D à coefficients constants. Il suffit donc de savoir ce que devient δ d'un point de vue multi-échelle pour donner un sens au concept *d'espace-échelle* (“scale-space”, cf. Florack et al. [101]). Dans les théories de scale-space standard on prend les gaussiennes :

$$G_\sigma = G(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Ce noyau gaussien est la version multi-échelle de l'identité. Il exprime ce que devient un point à l'échelle définie par la largeur σ de G_σ . Comme le produit de convolution satisfait $G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$, la loi de composition des échelles \dagger est donnée par $\sigma \dagger \tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; autrement dit, c'est le paramètre σ^2 qui satisfait une loi additive.

Mais la gaussienne étant le noyau de la chaleur, on est ainsi naturellement conduit à considérer que le point de vue multi-échelle consiste à traiter le signal I comme la condition initiale d'une solution de *l'équation de la chaleur* :

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\Delta\right)I = 0 \text{ (avec } 2s = \sigma^2 \text{)}.$$

Cette équation de diffusion relie la “géométrie pure” à sa contrepartie “physique” (l'aspect multi-échelle). Elle exprime la contrainte opérationnelle de transformation du signal *en observable géométrique*. Elle remplace l'infinitésimal par du local multi-échelle, la géométrie différentielle classique correspondant au cas idéal d'une échelle = 0 (résolution infinie).

Dans la mesure où si D est un opérateur différentiel d'ordre p on a par définition

$$\langle DI | \varphi \rangle = (-1)^p \langle I | D\varphi \rangle.$$

on voit que les RPs en dérivées partielles de gaussiennes ont pour principale fonction *de dériver le signal au sens des distributions*. Plus précisément, comme une gaussienne G définit une échelle par sa largeur, un RP en forme de DG a pour fonction d'appliquer l'opérateur différentiel D à une certaine échelle. C'est donc de la géométrie différentielle multi-échelle qui se trouve *neuralement implémentée*.

À la fin des années 70, le grand spécialiste de la vision David Marr [205] fut le premier à comprendre la fonctionnalité d'un tel produit de l'évolution biologique. Il était connu empiriquement depuis longtemps des neurophysiologistes que les cellules ganglionnaires de la rétine détectent des contrastes spatiaux (cf. Buser, Imbert [50]). Marr introduisit l'hypothèse que cela était dû au fait qu'elles effectuent une convolution très particulière permettant d'extraire les discontinuités qualitatives encodées dans le signal, discontinuités qu'il appela des “zero-crossings”. Il affirma aussi que les



FIG. 30. Le lissage (Gaussian blurring) $G * I$ d'une image I par des gaussiennes de largeur croissante.

niveaux supérieurs du processing visuel s'enracinaient dans ce premier niveau d'organisation morphologique de l'image rétinienne, qu'il appela le "2D primal sketch". En fait, comme nous allons le voir dans la section 5, il avait découvert que la convolution du signal avec des RPs en ΔG était une *analyse en ondelettes* du signal, c'est-à-dire une analyse de Fourier multi-échelle et spatialement localisée qui permettait d'extraire les discontinuités.

Précisons. Si le RP $\varphi(x, y)$ est une dérivée de gaussienne DG , la formule classique $I * DG = D(I * G)$ fournit une interprétation fonctionnelle du filtrage $I * DG$: le filtrage est équivalent à $D(I * G)$, c'est-à-dire à l'application de l'opérateur différentiel D au signal I lissé (régularisé) à l'échelle de G . À l'échelle 0 on retrouve évidemment la dérivée classique DI puisque $I * D\delta = D(I * \delta) = DI$.

Par exemple, les cellules ganglionnaires de la rétine ou celles du corps genouillé latéral dont les RFs sont en laplacien de gaussienne ΔG calculent le laplacien du signal régularisé $\Delta(G * I) = \Delta G * I$. La convolution $G * I$ de I par G

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

(où $r^2 = x^2 + y^2$) correspond au lissage de I par "Gaussian blurring" (cf. figure 30).

Le laplacien $\Delta(G * I)$ de cette convolution extrait les bords de $G * I$ (cf. figure 31). Mais comme $\Delta(G * I) = \Delta G * I$, avec

$$\Delta G(x, y) = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{r^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

la détection de bord équivaut à la convolution de l'image I par des profils récepteurs en ΔG .²

Le critère du zero-crossing dit que, dans ce contexte et en dimension 1 pour simplifier, une discontinuité correspond à une traversée de 0 par $\Delta G * I$, encadrée par 2 pics respectivement positif et négatif très aigus. Mais cela n'est rien d'autre que la version multi-échelle de la structure bien connue de la dérivée première δ' de la distribution de Dirac δ . La figure 32 illustre le concept.

²Cet algorithme se trouve aujourd'hui dans tous les logiciels de traitement d'images.

CHAPITRE 3

V1 comme structure de contact

Dans ce chapitre nous allons commencer à préciser les éléments de modélisation introduits précédemment. Nous présenterons deux modèles de base faisant de V1 une implémentation d’une structure de contact tridimensionnelle. Le premier modèle repose sur la structure de contact canonique de l’espace des 1-jets $V = J^1M$ et le second sur la structure de contact du groupe euclidien $E(2)$ qui opère sur V . Pour faire la transition, nous interpréterons d’abord le premier modèle en termes d’une structure de groupe sur V isomorphe au groupe de Heisenberg. Mais commençons par quelques brèves remarques méthodologiques.

1. Méthodologie des modèles géométriques

Il existe plusieurs modèles fort intéressants de formation de pinwheels à partir de réseaux de neurones susceptibles d’apprentissage hebbien (cf. par exemple les propositions de Haim Sompolinsky, Michael Shelley et Kukjin Kang [158], cf. également le modèle de Mäkkulainen-Sirosh [225]). Mais nous allons nous focaliser dans cette section plutôt sur un modèle purement géométrique. Nous reviendrons plus bas au chapitre 8, dans la partie “Physique”, sur les modèles de type réseaux de neurones.

Nous adopterons trois principes.

- (i) Nous suivrons la méthodologie standard de toute modélisation :
 - simplifier les phénomènes empiriques,
 - se focaliser sur un nombre restreint de propriétés pertinentes,
 - construire un premier modèle sur ces bases,
 - revenir aux données empiriques,
 - complexifier le modèle de départ.
- (ii) Nous ne chercherons à élaborer que des premiers modèles élémentaires des phénomènes de base que sont l’intégration des contours et l’existence de contours illusoire.
- (iii) Nous simplifierons drastiquement les données neurophysiologiques :
 - seulement le “minimal discharge field” (“spiking response”),
 - pas d’échelle (résolution infinie),
 - seulement la variable d’orientation : pas de dominance oculaire, pas de phase spatiale, pas de fréquence spatiale (nous y reviendrons au chapitre 10),
 - pas de contrôles moteurs : yeux, tête, mouvements du corps,

- pas de focalisation attentionnelle,
- seulement $V1$, pas d'autres aires comme $V2$, $V4$ ou $MT/V5$ avec des feedbacks descendants sur $V1$ et le CGL .

Mais, même avec ces simplifications drastiques, la reconstruction mathématique des phénomènes et l'explication géométrique des architectures fonctionnelles sont non triviales et utilisent des concepts sophistiqués comme ceux de fibration, de transport parallèle, de structure de contact, de condition d'intégration de Frobenius, de géodésiques sous-riemanniennes. Cela n'est pas si étonnant que cela peut paraître au prime abord dans la mesure où ces concepts ont été introduits par certains des plus grands géomètres après Riemann (Sophus Lie, Elie Cartan, Misha Gromov, entre autres) précisément pour comprendre comment une géométrie globale pouvait émerger d'une intégration cohérente de données locales infinitésimales (différentielles).

2. Relevées legendriennes, forme de contact et espace des 1-jets

Les résultats expérimentaux présentés jusqu'ici peuvent se formuler en première approximation en disant qu'il existe une implémentation neuronale de la *structure de contact* de la fibration $\pi : R \times \mathbb{P}^1 \rightarrow R$.

2.1. L'espace des 1-jets. Dans le premier modèle que nous proposons, $V1$ est considéré comme une réalisation neuronale de l'espace des 1-jets de courbes dans R ou du fibré de contact du plan. En général, si M est une n -variété, on peut considérer en chaque point a de M , non pas l'espace tangent T_aM , mais l'ensemble de ses hyperplans (sous-espaces vectoriels de codimension 1), noté C_aM . C_aM est isomorphe à l'espace projectif \mathbb{P}^{n-1} . L'espace total recollant ces fibres s'appelle le *fibré de contact* de M ; nous le noterons CM . Dans notre cas, $M = R$ est 2-dimensionnelle, les hyperplans sont les orientations (droites) et $CM = M \times \mathbb{P}^1$.

CM est presque l'espace des 1-jets J^1M . Pour le voir, il suffit d'interpréter la coordonnée de ses fibres C_aM en termes de T_aM . Munissons M de coordonnées locales (x, y) en a et le plan tangent T_aM des coordonnées naturelles (ξ, η) qui lui sont associées dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Alors, sur un ouvert ne contenant pas la droite "verticale" $\xi = 0$, une coordonnée locale de C_aM est $p = \frac{\eta}{\xi}$ et, au voisinage de $\xi = 0$, on pourra prendre la coordonnée $p = \frac{\xi}{\eta}$. Un élément c de CM est donc repéré par les coordonnées $(x, y, p) = (a, p)$. On vérifie aisément que les changements de carte associés à ces coordonnées naturelles sur CM sont des difféomorphismes. Ainsi, CM est une variété différentiable de dimension 3 isomorphe à $V = M \times \mathbb{P}^1$.

Se donner une section s de ce fibré $\pi : E = CM \rightarrow M$ consiste alors à associer à chaque point a de la base M un élément $s(a)$ de la fibre C_aM au-dessus de a , c'est-à-dire une direction ou orientation. Les sections sont donc des champs de couples $(a, p) = (\text{position}, \text{direction})$. Un cas particulier fondamental de section restreinte à une courbe γ tracée sur la variété de base M est obtenu en choisissant, au-dessus de chaque point de γ , la direction de la *tangente* à γ en ce point.

La différence entre CM et J^1M est que J^1M a pour fibre le \mathbb{R} des valeurs de $\tan(\theta)$, l'angle θ étant défini modulo π , étant mesuré à partir du choix de l'axe des x et devant rester $\neq \frac{\pi}{2}$. Pour obtenir la fibre \mathbb{P}^1 de CM , il faut compactifier \mathbb{R} en ajoutant le point à l'infini. CM est le compactifié à l'infini de J^1M et sa fibre correspond à celle de J^1M par la projection stéréographique $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \rightarrow \tan(\theta)$. Dans le langage de

la géométrie algébrique, J^1M est l'ouvert affine de CM complémentaire de la section à l'infini, le choix de cette section correspondant au choix d'un axe des x dans le plan R .

Revenons pour les préciser à nos remarques de la section 3.4 du chapitre 2. Le jet d'ordre 1, noté $j^1f(x)$, d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point x de \mathbb{R} est caractérisé par la donnée de l'abscisse du point x considéré, de la valeur de la fonction f en ce point, $y = f(x)$, et de la valeur de sa dérivée $p = f'(x)$. D'après le théorème des fonctions implicites, toute courbe γ différentiable est localement le graphe d'une telle fonction (sauf aux points singuliers à tangente verticale) et, en un point donné a , le 1-jet associé ne dépend pas du choix des coordonnées puisque la définition de la tangente est intrinsèque. On note ce 1-jet $j^1\gamma(a)$. Insistons encore une fois sur le fait que les espaces de jets sont fondamentaux car ils ramènent des calculs locaux (infinitésimaux) à des calculs *ponctuels*. La contrepartie de cet extraordinaire bénéfice est *l'augmentation de la dimension* (c'est-à-dire du nombre de variables indépendantes) : au lieu de considérer le *plan* muni des coordonnées (x, y) et de calculer $y' = \frac{dy}{dx}$ (ce qui exige, nous l'avons vu, de connaître non seulement la valeur $y = f(x)$ de f en x mais aussi les valeurs de f dans un voisinage de x), on se place dans l'espace à *trois* dimensions (x, y, p) (qui est un espace de phases projectivisé) sur lequel on impose la contrainte $y' = p$. Cette idée très profonde remonte à Hamilton qui, en introduisant les moments conjugués p_i des variables de position q_i d'un système mécanique comme des variables indépendantes, est passé de la formulation lagrangienne à la formulation hamiltonienne de la Mécanique.

Si γ est une courbe (lisse) de $M = R$ d'équations $x(s)$ et $y(s)$, le 1-jet $j^1\gamma(a(s))$ de γ en $a(s) = (x(s), y(s))$ est l'élément de contact $(a(s), p(s))$ où $p(s) = \frac{y'(s)}{x'(s)}$ est la pente de la tangente à γ en $a(s)$.¹ L'image de $j^1\gamma$ s'appelle la *relevée legendrienne* de γ . Les relevées legendriennes des courbes γ de R représentent ces courbes non plus comme ensembles de points dans R mais, dualement, comme enveloppes de leur tangentes. Il est remarquable que l'évolution biologique ait créé deux structures neurophysiologiques, la rétine et $V1$, afin d'implémenter la dualité projective pour les courbes.

2.2. E(2)-invariance. Choisir un repère (x, y, p) du fibré de contact CM ou J^1M équivaut à choisir un point O de M comme origine et le plan de contact C_0 (le plan (x, p)), le troisième axe y étant orthogonal à C_0 . Un tel choix brise la symétrie de R , mais la brisure de symétrie est compensée par le fait que la structure de J^1M est invariante sous l'action du groupe euclidien $E(2) = SO(2) \rtimes \mathbb{R}^2$ des déplacements du plan qui est le produit semi-direct \rtimes du groupe des rotations $SO(2)$ et du groupe des translations \mathbb{R}^2 .

Soit (p, r_θ) un élément of $E(2)$ où p est un point de M et r_θ la rotation d'angle θ .² (p, r_θ) agit sur les points a de M par

$$(p, r_\theta)(a) = p + r_\theta(a) .$$

¹Nous ne distinguons pas ici entre le plan rétinien R et la couche corticale M (la base de V) où il se projette. Autrement dit, nous considérons que l'application rétinotopique $\chi : R \rightarrow M$ est l'identité.

²Dans ce paragraphe, p dénote un point de M agissant par translation sur les points courants a de M . Cette notation ne doit pas être confondue avec $p = f'(x)$ dans J^1M .

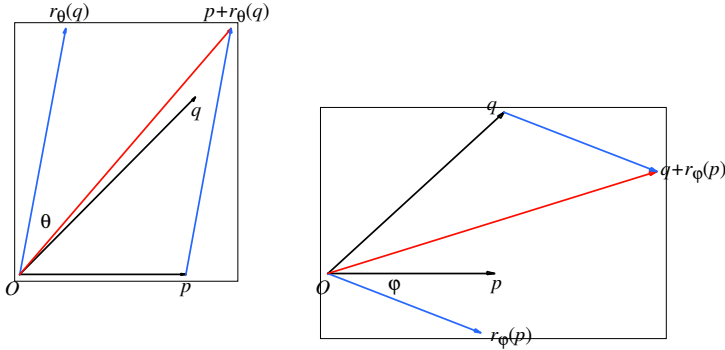


FIG. 1. La non commutativité du groupe euclidien $E(2)$. Les vecteurs $q + r_\varphi(p)$ et $p + r_\theta(q)$ sont complètement différents.

Si (p, r_θ) et (q, r_φ) sont 2 éléments de $E(2)$, leur produit (non commutatif) est donné par la formule :

$$(q, r_\varphi) \circ (p, r_\theta) = (q + r_\varphi(p), r_{\varphi+\theta}).$$

Le produit est non commutatif car $(p, r_\theta) \circ (q, r_\varphi) = (p + r_\theta(q), r_{\theta+\varphi})$. Bien sûr $r_{\varphi+\theta} = r_{\theta+\varphi}$, mais $q + r_\varphi(p) \neq p + r_\theta(q)$ (cf. figure 1).

La rotation r_θ agit sur la fibration $J^1M \rightarrow M$ par

$$r_\theta(a, \varphi) = (r_\theta(a), \varphi + \theta)$$

(où φ est la coordonnée angulaire correspondant à p). Cette action supplémentaire sur la fibre garantit le fait que l'alignement des directions préférentielles est lui aussi $E(2)$ -invariant (cf. figure 2). Elle rend l'action intéressante au niveau de la théorie des représentations des groupes.

2.3. Relevées legendriennes et condition d'intégrabilité. Soit γ une courbe différentiable tracée sur la variété M . L'application 1-jet $j^1\gamma : \gamma \subset M \rightarrow J^1M$ qui associe à tout point a de γ le 1-jet $j^1\gamma(a)$ de γ en ce point, c'est-à-dire l'élément de contact (a, p_a) où p_a est la tangente à γ en a , a pour image une courbe gauche Γ dans $V = J^1M$ qui est sa relevée legendrienne (l'enveloppe de ses tangentes, cf. figure 3).

Si $a(s)$ est une paramétrisation de γ , on $p_a = \frac{y'(s)}{x'(s)}$ (que nous noterons $a'(s)$ pour simplifier) et donc $\Gamma = (a(s), p(s)) = (a(s), a'(s))$. Dans les coordonnées x et y et relativement à l'équation $y = f(x)$ de γ , l'équation de Γ est $(x, y, p) = (x, y = f, y' = f')$.

Supposons maintenant que nous n'ayons aucun accès à ce qui se passe dans l'espace de base M et que nous essayions de le reconstruire à partir de ce qui se passe dans l'espace total $V \simeq J^1M \simeq \mathbb{R}^3$. A chaque courbe γ dans M est associée une courbe Γ dans V . *Mais la réciproque est fautive*. Il est donc crucial de pouvoir caractériser, parmi les courbes gauches Γ dans V , celles qui sont les relevées legendriennes des courbes γ dans M . Nous savons déjà comment le faire et c'est cette condition que nous voudrions maintenant approfondir.

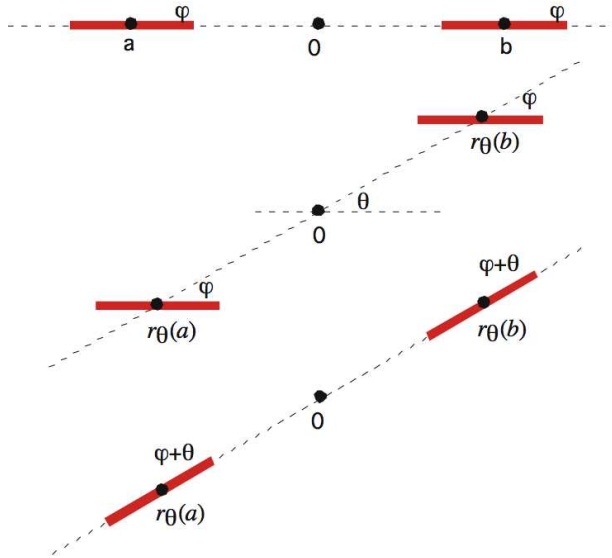


FIG. 2. La $E(2)$ -invariance de la structure de contact.

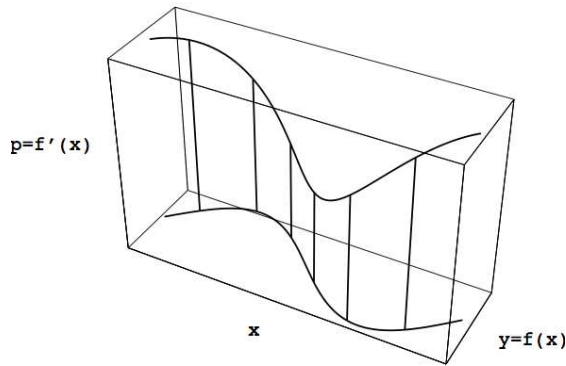


FIG. 3. La relevée legendrienne d'une courbe γ , $y = f(x)$, de M dans l'espace de la fibration $V = M \times P$. Au-dessus de chaque point $(x, y = f(x))$ de γ on sélectionne la direction tangente $p = f'(x)$.

Soit $\Gamma = v(s) = (a(s), p(s))$ une courbe (paramétrisée) dans V . La projection $a(s)$ de Γ est une courbe γ dans M et Γ est le relèvement de γ si et seulement si $p(s) = a'(s)$. De façon équivalente, si Γ est localement définie par des équations

$y = f(x)$, $p = g(x)$, il existe une courbe γ dans M telle que $\Gamma = j^1\gamma$ si et seulement si $g(x) = f'(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $p = y'$.

En géométrie différentielle, cette condition s'appelle une *condition d'intégrabilité de Frobenius*. Elle dit que pour être une relevée legendrienne dans V , Γ doit être une *courbe intégrale de la structure de contact* de la fibration π au sens suivant. Soit $t = (a, p; \alpha, \pi) = (x, y, p; \xi, \eta, \pi)$ un vecteur tangent à V au point $v = (a, p) = (x, y, p)$. Si t est tangent à la courbe d'équation $y = y(x)$ et $p = p(x)$, on a $t = (x, y, p; 1, y', p')$. Si $p = y'$, c'est-à-dire si la condition d'intégrabilité est satisfaite, on a donc $t = (x, y, p; 1, p, p')$. Etant donnée cette forme très spéciale, t appartient au *noyau de la forme différentielle* $\omega = dy - p dx$ sur $V = J^1M$. En effet, d'après la formule générale $\omega(t) = \sum \omega_i t_i$ (où t_i et ω_i sont les composantes respectives de t et ω relativement aux bases de TJ^1M et T^*J^1M associées aux coordonnées locales (x, y, p)), on a $\omega(t) = -p \cdot 1 + 1 \cdot p + 0 \cdot p' = -p + p = 0$ puisque $\omega = -p dx + 1 \cdot dy + 0 \cdot dp$ et dx (resp. dy , dp) appliquée à $(1, p, p')$ en sélectionne la première (resp. la seconde, la troisième) composante 1 (resp. p , p'). Mais le noyau d'une forme différentielle (non nulle) sur un espace 3-dimensionnel est un plan et le vecteur tangent t appartient par conséquent au plan C_v , tangent à $V = J^1M$ en v (i.e. $C_v \subset T_vV$) (cf. figure 4).³

Ainsi, les tangentes aux courbes de $V = J^1M$ qui sont de la forme $j^1\gamma$ appartiennent au champ de plans $\mathcal{C} : v \rightarrow C_v$. Les plans C_v sont appelés *plans de contact*. Leur champ est appelé *structure de contact* sur J^1M ou CM et la 1-forme différentielle ω dont il est le noyau est appelée *forme de contact*. Puisque les courbes de la forme $j^1\gamma$ sont tangentes en tout point à ce champ de plans, on dit que ce sont des *courbes intégrales* de la structure de contact (cf. figure 4).

Réciproquement, considérons une courbe Γ de J^1M et paramétrons-la sous la forme

$$\Gamma = \{(x, y, p) \mid y = f(x), p = g(x)\}.$$

Sur Γ , on a alors $\omega = (f' - g)dx$ (car $dy = f'dx$ et $p dx = g dx$). Supposons que cette courbe Γ soit une intégrale de la structure de contact, autrement dit que $\omega = 0$ sur Γ . Alors $f' = g$ et Γ est donc bien de la forme $j^1\gamma$.

La structure de contact \mathcal{C} est ainsi la structure géométrique qui permet de caractériser les relevées legendriennes de courbes planes parmi les autres courbes gauches de $V = J^1M$. A travers le changement de coordonnées $u \rightarrow -p$, $v \rightarrow x$, $w \rightarrow y$, elle se transforme dans la structure de contact standard sur \mathbb{R}^3 (de coordonnées (u, v, w)) qui est définie par la 1-forme $\omega = u dv + dw$.

2.4. Structure de contact et courbure. Il est très important pour notre modélisation que la structure de contact soit définie par des *plans* et que donc les vecteurs tangents $t = (a, p; \alpha, \pi) = (x, y, p; \xi, \eta, \pi)$ des relevées legendriennes Γ dans V des courbes γ dans M puissent posséder une composante verticale $\pi = p'$. En effet, comme d'après la condition de Frobenius on a $p = y'$ (si x est la variable indépendante), cela signifie que $\pi = p' = y''$. Autrement dit, la composante verticale des vecteurs tangents des relevées legendriennes Γ dans V correspond à la *courbure* des courbes γ dans M . Les courbes intégrales de la structure de contact encodent la courbure des courbes dans l'espace de base M et un vecteur tangent $t = (x, y, p; \xi, \eta, \pi)$ à V en $v = (x, y, p)$

³Il ne faut pas confondre C_v avec C_a . C_a est la fibre au-dessus de $a \in M$ du fibré de contact CM et est un sous-espace de CM , alors que C_v est le plan de contact de CM en $v \in TCM$ et est un sous-espace de T_vCM .

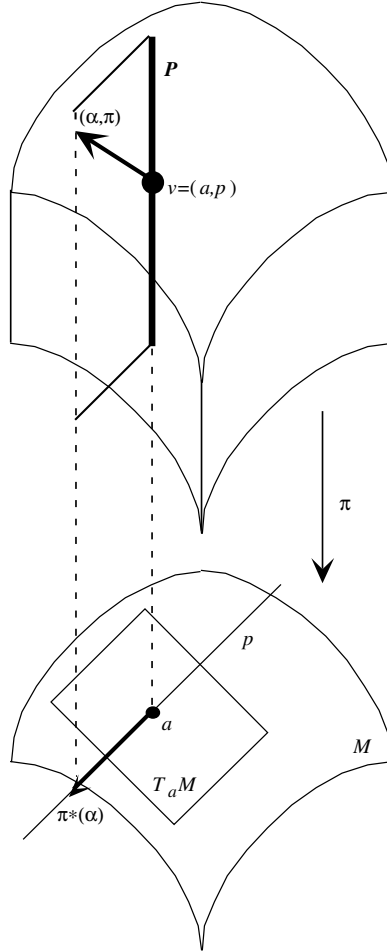


FIG. 4. La structure de contact sur le fibré de contact d’une variété de base M . Soient $a \in M$ et p un hyperplan du plan tangent $T_a M$. p correspond à un point de la fibre $C_a M$ de CM au-dessus de a . Soit $t = (\alpha, \pi)$ un vecteur tangent à CM en $v = (a, p)$. $t = (\alpha, \pi)$ appartient au plan de contact $C_v M$ de CM en v si et seulement si la projection $\pi_*(\alpha)$ de la composante “horizontale” α de t est portée par p .

définit le *cercle osculateur* de la projection γ dans M des courbes Γ de V tangentes à t . Dans la mesure où la structure de contact modélise l’architecture fonctionnelle de $V1$ et donc le système des connexions “horizontales” cortico-corticales, on voit que le modèle implique que les connexions “horizontales” puissent induire des contours courbes. Nous verrons au chapitre suivant consacré au “champ d’association” toute l’importance de ce fait. Steve Zucker a beaucoup insisté sur le rôle fonctionnel fondamental de la courbure. Si la co-axialité était définie par des sous-espaces de dimension

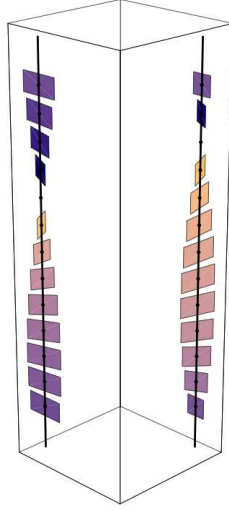


FIG. 5. Le champ des plans de contact C_v “vrille” trop pour être intégrable.

1 des T_vV , c’est-à-dire en quelque sorte par des “droites de contact”, alors $V1$ ne pourrait intégrer que des contours droits. C’est parce que la co-axialité est définie par des sous-espaces de dimension 2 des T_vV , c’est-à-dire par des plans de contact, que $V1$ peut intégrer des contours courbes.

2.5. La non-intégrabilité de la structure et la condition de Frobenius. Il faut souligner un point essentiel à propos de la structure de contact \mathcal{C} . Elle est définie comme le champ de plans $v \in V \mapsto C_v \subset T_vV$ qui est le champ des noyaux d’une 1-forme $\omega = dy - pdx$ sur V . Il est alors naturel de se demander si le champ $2D$ des plans C_v , qui possède beaucoup de courbes intégrales $1D$, est lui-même intégrable, autrement dit s’il existe des surfaces S de V tangentes à C_v en chacun de leur point v , c’est-à-dire telles que $T_vS = C_v$. Cela n’est pas du tout le cas et ne peut pas l’être. Le champ $v \mapsto C_v$ est le prototype d’un champ *non* intégrable. On peut s’en convaincre intuitivement : le champ C_v se “vrille” trop pour que des surfaces intégrales puissent exister (cf. figure 5).

De façon plus technique, on remarque que si $t \in T_vV$ est un vecteur tangent à V de composantes $t = (\xi, \eta, \pi)$, la condition d’annulation $\omega(t) = 0$ définit le plan $-p\xi + \eta = 0$ i.e. $\eta = p\xi$. Si l’on identifie V à \mathbb{R}^3 , C_v devient le plan “vertical” au-dessus de la droite “horizontale” de pente p . Lorsque l’on se déplace dans la fibre P_a au-dessus de a , ce plan tourne avec p (sa pente est égale à la “hauteur” dans la fibre) comme le montre la figure 5.

On démontre que cette non intégrabilité du champ des plans de contact C_v résulte de ce que la condition de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$ (ou $d\omega(t, t') = 0$ pour tous les t et t' tels que $\omega(t) = \omega(t') = 0$) n’est pas satisfaite. Cette condition provient du théorème disant qu’une condition nécessaire et suffisante d’intégrabilité est que, si $\{t_1, t_2\}$ est une base (locale) du champ C_v , le crochet de Lie $[t_1, t_2]$ appartienne à C_v , et que donc

C_v soit une *sous-algèbre de Lie* de T_vV . Mais pour $\omega = dy - pdx$ on a

$$(1) \quad \begin{aligned} d\omega &= - \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial p}{\partial p} dp \wedge dx \right) + d^2y - pd^2x \\ &= -dp \wedge dx = dx \wedge dp \end{aligned}$$

et donc

$$\omega \wedge d\omega = (-pdx + dy) \wedge dx \wedge dp = dy \wedge dx \wedge dp = -dx \wedge dy \wedge dp .$$

Mais cette 3-forme est la forme volume de V et ne peut donc en aucun cas être nulle. Elle est même “maximalement” non nulle. On peut aussi remarquer que pour la base

$$\left\{ t_1 = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} = (1, p, 0), t_2 = \frac{\partial}{\partial p} = (0, 0, 1) \right\}$$

de C_v on a $[t_1, t_2] = t_3 = -\frac{\partial}{\partial y} = (0, -1, 0)$ et que $t_3 = (0, -1, 0) \notin C_v$ car pour ce vecteur $-p\xi + \eta = -0 + (-1) = -1 \neq 0$.

La conséquence de la non-intégrabilité $2D$ – appelée *non holonomie* – de la structure de contact \mathcal{C} est que ses intégrales sont nécessairement *1-dimensionnelles*. Autrement dit, \mathcal{C} est fonctionnellement dédiée à l’intégration des *courbes*. Qui plus est, la non-intégrabilité de \mathcal{C} implique que la géométrie *immanente* de V , qui modélise l’architecture fonctionnelle de $V1$, *est complètement différente de la géométrie euclidienne même au niveau infinitésimal*, ce qui fait qu’elle n’est même pas riemannienne. Nous verrons plus bas au chapitre 6 qu’il s’agit d’une géométrie *sous-riemannienne*.

2.6. Symplectisation de la structure de contact de J^1M . En fait, la structure de contact de J^1M appartient à l’univers mathématique de ce que l’on appelle la *géométrie symplectique*. En effet, elle peut être considérée comme l’image de la 1-forme canonique du fibré cotangent T^*M une fois que l’on a *projectivisé* ce dernier au sens suivant. C’est ce que l’on appelle la “symplectisation” de la structure de contact.

En termes des coordonnées locales $(x, y, p; \xi, \eta, \pi)$, C_v est le plan d’équation $\eta = p\xi$. C’est, nous l’avons vu, le champ des noyaux de la 1-forme $\omega = -pdx + dy$. Mais ω n’est définie qu’à un facteur multiplicatif ($\neq 0$) près car il est évident que ω et $r\omega$ (avec $r \neq 0$) ont les mêmes noyaux. On peut donc considérer le fibré $\chi : S \rightarrow J^1M$ de base J^1M , de fibre le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ et d’espace total S . On définit alors une 1-forme canonique θ sur S de la façon suivante. Soient $s = (x, y, p, r) = (v, r)$ un point de S et $\sigma = (\xi, \eta, \pi, \rho) = (t, \rho) \in T_sS$ un vecteur tangent en s à S . L’image directe $\chi_*\sigma$ de σ par la projection χ est un vecteur tangent $t \in T_vJ^1M$ en $v = (x, y, p) = \chi(s)$ à J^1M . On pose alors $\theta(\sigma) = r\omega(t)$. On a :

$$\begin{aligned} d\theta &= rd\omega + dr \wedge \omega \\ &= rdx \wedge dp + dr \wedge (-pdx + dy) \\ &= rdx \wedge dp + pdx \wedge dr + dr \wedge dy . \end{aligned}$$

Cette 2-forme est fermée et non dégénérée. C’est par conséquent une forme symplectique sur S . Elle est fermée puisqu’elle est même exacte. Elle est non dégénérée car si $d\theta(\sigma, \sigma') = 0$ pour tout σ' alors $\sigma = 0$. Soient en effet $\sigma = (\xi, \eta, \pi, \rho)$ et $\sigma' = (\xi', \eta', \pi', \rho')$. On a :

$$\begin{aligned} d\theta(\sigma, \sigma') &= r(\xi\pi' - \xi'\pi) + p(\xi\rho' - \xi'\rho) + \rho\eta' - \rho'\eta \\ &= -(r\pi + p\rho)\xi' + \rho\eta' + r\xi\pi' + (p\xi - \eta)\rho' . \end{aligned}$$

L'annulation des coefficients de ξ', η', π', ρ' implique alors, vu que $r \neq 0$, la nullité de ξ, η, π, ρ . Donc $\sigma = 0$.

2.7. Structures de contact et groupes de Lie. Nous allons maintenant introduire une donnée géométrique fondamentale. La structure de contact de $V = J^1M$ peut être reconstruite comme une structure invariante par translation dans V considéré comme un *groupe de Lie*.

Un groupe de Lie G est par définition une variété différentiable munie d'une structure de groupe dont les opérations sont des applications différentiables. Il y existe des interactions subtiles entre les deux structures respectivement algébrique et différentiable.⁴ D'abord la structure de groupe s'exprime infinitésimalement par une structure *d'algèbre de Lie* sur l'espace tangent $\mathcal{G} = T_eG$ de G en l'origine e . En plus de sa structure vectorielle, \mathcal{G} possède une structure définie par des commutateurs linéaires et antisymétriques $[X, Y]$ vérifiant la relation caractéristique :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 .$$

Tout groupe de Lie G est "homogène", c'est-à-dire géométriquement identique en chaque point, car il opère sur lui-même par translations à gauche et à droite. Soit $g \in G$, on lui associe la translation à gauche L_g sur G définie par $L_g : h \mapsto gh$. Bien qu'inversibles, les translations à gauche ne sont pas pour autant des automorphismes de G car elles ne préservent pas l'élément neutre e . Mais elles sont néanmoins compatibles avec la loi de produit puisque $L_f \circ L_g = L_{fg}$. Elles fournissent une *trivialisatation globale canonique* du fibré tangent TG et beaucoup des propriétés géométriques des groupes de Lie découlent de cette propriété. En particulier en transportant par translations un repère de \mathcal{G} on obtient un repère global (G -invariant) de G . Cela s'exprime en disant que G est une variété "parallélisable".

Définissons alors un produit dans V par la formule :

$$(x, y, p) \cdot (x', y', p') = (x + x', y + y' + px', p + p') .$$

Il est immédiat de vérifier que cette loi de composition est associative, que l'origine $(0, 0, 0)$ de V est un élément neutre et que l'inverse de $v = (x, y, p)$ est $v^{-1} = (-x, -y + px, -p)$. A cause de l'asymétrie du terme px' , ce produit est *non* commutatif. V est un produit *semi-direct* $V = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$. Le plan base \mathbb{R}^2 de la fibration $\pi : V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ constitue le sous-groupe commutatif des translations et le centre Z de V est constitué de l'axe des y . En effet (x', y', p') commute avec tous les éléments de V si et seulement si pour tout (x, y, p) on a $px' = p'x$, ce qui implique $x' = p' = 0$.

L'algèbre de Lie de V est l'espace vectoriel $\mathcal{V} = T_0V$ des vecteurs tangents $t = (\xi, \eta, \pi)$ avec le crochet de Lie

$$[t, t'] = [(\xi, \eta, \pi), (\xi', \eta', \pi')] = (0, \xi'\pi - \xi\pi', 0) .$$

⁴Pour des précisions sur ce qui suit, on pourra consulter tout ouvrage comprenant une introduction à la géométrie différentielle, à la théorie des formes différentielles sur les variétés et à la théorie des groupes de Lie. Les articles de l'*Encyclopædia Universalis* sur ces thèmes sont excellents. Personnellement, nous apprécions particulièrement les "bibles" de Vladimir Arnold [15] et Ralph Abraham, Jerrold Marsden [1], l'incontournable Spivak [305] ainsi que l'ouvrage d'introduction à la conception d'Elie Cartan de Richard Sharpe [295].

Cette algèbre de Lie peut être représentée par celle des matrices nilpotentes

$$m(\xi, \eta, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & \pi & \eta \\ 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les éléments $v = (x, y, p)$ du groupe V étant alors représentés par les matrices $M(x, y, p) = I + m(x, y, p)$ (I étant la matrice unité), c'est-à-dire

$$M(x, y, p) = \begin{pmatrix} 1 & p & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette représentation permet d'établir un lien naturel de la structure de groupe de Lie ci-dessus avec celle qui exponentie cette algèbre de Lie et qui est donnée, puisque le développement de l'exponentielle s'arrête à l'ordre 2 vu que les matrices $m(x, y, p)$ sont nilpotentes ($m(x, y, p)^2 = m(0, 0, xp)$ et $m(x, y, p)^3 = 0$), par la formule :

$$\begin{aligned} \exp(m(\xi, \eta, \pi)) &= I + m(x, y, p) + \frac{1}{2}m(0, px, 0) \\ &= M\left(x, y + \frac{1}{2}px, p\right). \end{aligned}$$

La loi de groupe est alors

$$(x, y, p) \cdot (x', y', p') = \left(x + x', y + y' + \frac{1}{2}(px' - xp'), p + p'\right)$$

qui est une version symétrisée de la loi précédente. Il s'agit du *groupe de Heisenberg*, sur lequel nous reviendrons longuement au chapitre 6. Le centre Z des deux groupes est l'axe des y .

Considérons alors la *translation à gauche* L_v de V définie par $L_v(v') = v \cdot v'$. C'est un difféomorphisme non linéaire de V dont l'application tangente en 0 est l'application linéaire

$$\begin{aligned} T_0L_v : \quad T_0V &\rightarrow T_vV \\ t = (\xi, \eta, \pi) &\mapsto T_0L_v(t) = (\xi, \eta + p\xi, \pi) \end{aligned}$$

La matrice de T_0L_v est

$$T_0L_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela montre que la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}\right\}$ du fibré tangent $TV = TJ^1M$ associée au système de coordonnées $\{x, y, p\}$ n'est pas invariante à gauche. C'est l'origine de la non holonomie. Pour obtenir une base invariante à gauche il faut traduire au moyen des L_v la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}\right\}_0$ en 0 et cela donne la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}\right\}$, c'est-à-dire $\{t_1, -t_3, t_2\}$. On a $[t_1, t_2] = t_3$, les autres crochets étant nuls.

Considérons maintenant un vecteur t de C_0 . Comme $\eta = p\xi$ et $p = 0$, on a $\eta = 0$. Son translaté $T_0L_v(t)$ est par conséquent donné par $(\xi, p\xi, \pi)$. Comme $\eta = p\xi$, $T_0L_v(t)$ est un élément du plan de contact C_v et la structure de contact $\mathcal{C} = \{C_v\}$ n'est rien d'autre que le champ invariant à gauche des plans tangents traduits à gauche de

C_0 . De manière équivalente, on peut dire que \mathcal{C} est le champ des noyaux de la 1-forme ω qui est invariante à gauche. En effet à l'origine $\omega = dy - pdx$ est simplement $\omega_0 = dy$. Si on translate ω_0 au point v on obtient $\omega_v = T_0L_v^*(\omega_0)$ défini par la formule $\omega_v(t) = \omega_0(T_0L_v^{-1}(t))$ pour $t = (\xi, \eta, \pi) \in T_vV$. Mais

$$T_0L_v^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$T_0L_v^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ -p\xi + \eta \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\omega_v(t) = dy(\xi, -p\xi + \eta, \pi) = -p\xi + \eta = dy(t) - pdx(t) = \omega(t).$$

2.8. Représentations adjointe et coadjointe, la forme de Maurer-Cartan. Exemplifions sur cet exemple très simple quelques traits généraux des groupes de Lie sur lesquels nous reviendrons à la section 4.9.1 du chapitre 5. La translation à gauche L_v translate la situation en 0 dans la situation équivalente en v . On peut revenir en 0 en utilisant la translation à droite $R_{v^{-1}}$. On obtient ainsi ce que l'on appelle un *automorphisme intérieur* du groupe de Lie $V = J^1M$ (il est trivial de vérifier qu'il s'agit bien d'un morphisme de groupes) :

$$A_v : \begin{array}{ccc} v' & \mapsto & v.v'.v^{-1} \\ (x', y', p') & \mapsto & (x', y' + px' - p'y, p') \end{array}.$$

Comme 0 est un point fixe de A_v , l'application tangente $Ad_v = T_0A_v$ de A_v en 0 est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{V} = T_0V$. Sa matrice (le jacobien de A_v en 0) est donnée par :

$$Ad_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est trivial de vérifier que cette application $v \mapsto Ad_v$ de V dans le groupe $Aut(\mathcal{V})$ des automorphismes de \mathcal{V} est une *représentation* (c'est-à-dire un morphisme de groupes). On l'appelle la *représentation adjointe* de V . Son application tangente est un morphisme d'algèbres de Lie, noté ad_t , de l'algèbre de Lie \mathcal{V} dans l'algèbre de Lie $End(\mathcal{V})$ (endomorphismes de \mathcal{V}) de $Aut(\mathcal{V})$. Si $t = (\xi, \eta, \pi) \in \mathcal{V} = T_0J^1M$, la matrice de ad_t est

$$ad_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $ad_t(t') = (0, \xi'\pi - \xi\pi', 0) = [t, t']$ et le crochet de Lie peut ainsi être reconstruit à partir de la représentation adjointe.

Les *orbites* de la représentation adjointe sont faciles à calculer. Si $v = (x, y, p)$ varie dans $V = J^1M$, et si $t = (\xi, \eta, \pi) \in \mathcal{V} = T_0V$ est au contraire fixé, alors $Ad_v(t) = (\xi, p\xi + \eta - x\pi, \pi)$ engendre la droite $\tilde{t} = (\xi, \mathbb{R}, \pi)$ quand $\xi \neq 0$ ou $\pi \neq 0$.

Quand $\xi = \pi = 0$, $Ad_v(t) = t$ et tous les éléments $t = (0, \eta, 0)$ sont des points fixes : $\tilde{t} = \{t\}$.

Il est facile de *dualiser* ces constructions. Soit $\{dx, dy, dp\}$ la base de l'espace vectoriel des 1-formes sur $V = J^1M$ associée au système de coordonnées $\{x, y, p\}$. Au point 0 on obtient une base du dual \mathcal{V}^* de l'algèbre de Lie $\mathcal{V} = T_0M$, et donc si θ est une 1-forme sur \mathcal{V} elle peut s'écrire $\theta = \alpha dx + \beta dy + \delta dp = (\alpha, \beta, \delta)$. Si $t \in \mathcal{V}$, il est conventionnel de noter $\langle \theta, t \rangle$ la valeur $\theta(t)$ afin de souligner la dualité entre vecteurs tangents et 1-formes (covecteurs). On définit alors la *représentation co-adjointe* par $\langle Ad_v^*(\theta), t \rangle = \langle \theta, Ad_v(t) \rangle$. Il est facile de voir qu'il s'agit bien d'une représentation du groupe V sur \mathcal{V}^* . Comme

$$\begin{aligned} \langle \theta, Ad_v(t) \rangle &= \left\langle \alpha dx + \beta dy + \delta dp, \left(\xi \frac{\partial}{\partial x}, (p\xi + \eta - x\pi) \frac{\partial}{\partial y}, \pi \frac{\partial}{\partial p} \right) \right\rangle \\ &= \alpha\xi + \beta(p\xi + \eta - x\pi) + \delta\pi \\ &= (\alpha + \beta p)\xi + \beta\eta + (\delta - \beta x)\pi \end{aligned}$$

on obtient $Ad_v^*(\theta) = (\alpha + \beta p, \beta, \delta - \beta x)$.

Les orbites de la représentation co-adjointe sont les plans $(\mathbb{R}, \beta, \mathbb{R})$ si $\beta \neq 0$ (c'est-à-dire les plans parallèles au plan (α, δ) avec une ordonnée β). Si $\beta = 0$, tous les points $(\alpha, 0, \delta)$ du plan (α, δ) sont des points fixes.

En prenant l'application tangente de la représentation co-adjointe on obtient l'adjointe ad^* de l'application ad . Il s'agit d'un morphisme d'algèbres de Lie de \mathcal{V} dans $End(\mathcal{V}^*)$ défini par

$$\begin{aligned} ad_t^*(\theta)(t') &= \langle ad_t^*(\theta), t' \rangle = \langle \theta, ad_t(t') \rangle = \langle \theta, [t, t'] \rangle \\ &= \langle \alpha dx + \beta dy + \delta dp, (0, \xi'\pi - \xi\pi', 0) \rangle = \beta(\xi'\pi - \xi\pi') . \end{aligned}$$

Mais comme $\xi' = dx(t')$ et $\pi' = dp(t')$, on obtient $ad_t^*(\theta) = (\beta\pi, 0, -\beta\xi)$.

Disons maintenant un mot de ce qu'on appelle la *forme de Maurer-Cartan* Λ d'un groupe de Lie. Soit $dv = (dx, dy, dp)$ la différentielle des coordonnées de V . Elle peut être considérée comme une 1-forme $dv \in T^*V \otimes \mathcal{V}$ (où \otimes est le produit tensoriel) sur V à valeurs non plus dans \mathbb{R} mais dans l'algèbre de Lie $\mathcal{V} = T_0V$ au sens où, si $t_v = (\xi, \eta, \pi) \in T_vV$ est un vecteur tangent de V en v , $dv(v)(t_v)$ est alors un vecteur tangent à V en 0.⁵ Mais, précisément parce que les coordonnées $v = (x, y, p)$ ne sont pas holonomes, dv n'est pas invariante à gauche. La forme de Maurer-Cartan Λ consiste à partir de la 1-forme $dv(0)$ sur T_0V et à la translater de façon à obtenir une 1-forme qui est invariante à gauche par construction. Par définition, $\Lambda(v) = (T_vL_{v^{-1}})^* dv(0)$ où $T_vL_{v^{-1}} = T_0L_v^{-1} : T_vV \rightarrow T_0V$. On a donc par définition

$$\Lambda(v) : T_vV \xrightarrow{T_vL_{v^{-1}}} T_0V \xrightarrow{dv(0)} \mathbb{R} .$$

Mais pour tout vecteur tangent $t = (\xi, \eta, \pi) \in T_0V$, la valeur $dv(0)(t)$ n'est rien d'autre que t lui-même puisque dx , dy et dp extraient les composantes de t . On obtient par conséquent $\Lambda(v)(t) = T_0L_v^{-1}(t) = (\xi, -p\xi + \eta, \pi)$. Cela montre que :

$$\Lambda = (dx, \omega, dp) .$$

⁵ $dv(v)(t_v)$ est la valeur en t_v de la 1-forme dv prise au point v de V .

En utilisant cette expression de la forme de Maurer-Cartan Λ , il est facile de vérifier que Λ satisfait l'équation fondamentale dite de Maurer-Cartan

$$d\Lambda = -\frac{1}{2}[\Lambda, \Lambda]$$

qui est une équation *universelle* pour les groupes de Lie. En effet, Λ peut s'écrire

$$\Lambda = dx \otimes \partial_x + \omega \otimes \partial_y + dp \otimes \partial_p \in T^*V \otimes \mathcal{V}$$

où la présence du terme $\omega \otimes \partial_y$ au lieu de $y \otimes \partial_y$ exprime la non holonomie. Comme $d^2x = d^2y = 0$ et $d\omega = dx \wedge dp$ d'après l'équation (1), on obtient $d\Lambda = (dx \wedge dp) \otimes \partial_y$. Par ailleurs, par définition du produit extérieur des 1-formes à valeurs dans une algèbre de Lie, on a :

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Lambda] &= (dx \wedge dx) \otimes [\partial_x, \partial_x] + (dx \wedge \omega) \otimes [\partial_x, \partial_y] + (dx \wedge dp) \otimes [\partial_x, \partial_p] \\ &\quad + (\omega \wedge dx) \otimes [\partial_y, \partial_x] + (\omega \wedge \omega) \otimes [\partial_y, \partial_y] + (\omega \wedge dp) \otimes [\partial_y, \partial_p] \\ &\quad + (dp \wedge dx) \otimes [\partial_p, \partial_x] + (dp \wedge \omega) \otimes [\partial_p, \partial_y] + (dp \wedge dp) \otimes [\partial_p, \partial_p] . \end{aligned}$$

Mais $dx \wedge dx = \omega \wedge \omega = dp \wedge dp = 0$ et $[\partial_x, \partial_x] = [\partial_y, \partial_y] = [\partial_p, \partial_p] = 0$ pour des raisons générales d'antisymétrie ; $dx \wedge \omega = dx \wedge dy$ et $dp \wedge \omega = dp \wedge dy - pdp \wedge dx$ par définition de ω ; $[\partial_x, \partial_y] = [\partial_y, \partial_p] = 0$ et $[\partial_x, \partial_p] = -\partial_y$ à cause de la structure d'algèbre de Lie. Toutes ces égalités impliquent immédiatement $[\Lambda, \Lambda] = -2d\Lambda$.

2.9. Structures de contact et connexions. Un des grands intérêts de l'interaction entre une structure de contact \mathcal{C} et une structure de groupe de Lie est que l'on peut considérer que \mathcal{C} et la 1-forme invariante à gauche ω définissent une *connexion* (au sens d'Elie Cartan) sur $V = J^1M$ associée à la projection $\pi' : V \rightarrow B$ de V sur le plan de base (x, p) . La fibre de π' est l'axe des y . De façon générale, une connexion sur une variété V est une façon de comparer les plans tangents au moyen d'un transport parallèle des vecteurs tangents. On peut montrer que, de façon générale, la connexion est compatible avec la projection $\pi' : V \rightarrow V/W = B$, où W est le sous-groupe d'isotropie de ω_0 (dans notre cas $\omega_0 = dy$) pour la représentation coadjointe.⁶ Par définition, W est l'ensemble $W = \{v \in V \mid Ad_v^*(\omega_0) = \omega_0\}$. C'est un groupe de Lie de dimension 1 et son algèbre de Lie \mathcal{W} est l'ensemble $\mathcal{W} = \{t \in v \mid ad_t^*(\omega_0) = 0\}$. Comme $\omega_0 = dy = (\alpha = 0, \beta = 1, \delta = 0)$, on a, pour $v = (x, y, p)$, $Ad_v^*(\omega_0) = (\alpha + \beta p, \beta, \delta - \beta x) = (p, 1, -x)$. Pour satisfaire l'identité $Ad_v^*(\omega_0) = \omega_0 = (0, 1, 0)$ on doit avoir $x = 0$ et $p = 0$. Donc W est l'axe des y , la loi de groupe restreinte étant tout simplement l'addition $y + y'$. On vérifie que, comme $ad_t^*(\omega_0) = (\pi, 0, -\xi)$ puisque $\beta = 1$, l'identité $ad_t^*(\omega_0) = (\pi, 0, -\xi) = 0$ conduit à $\xi = 0$ et $\pi = 0$ qui est aussi l'axe des y , mais considéré cette fois comme l'algèbre de Lie \mathcal{W} de W . Quand on adopte ce point de vue, celui de la projection $\pi' : V \rightarrow V/W = B$ de V sur la base B de coordonnées (x, p) , on appelle les plans de contact C_v les plans *horizontaux* de la connexion.

Cette représentation comme connexion approfondit la *dualité projective* déjà évoquée à la section 2.1. Dans la perspective classique, le plan de base est le plan (x, y) et la fibre est l'axe des tangentes p . Les courbes γ sont données comme des fonctions $y = f(x)$ et la tangente p est calculée par dérivation. Dans la perspective alternative, le plan de base est le plan (x, p) et la fibre est l'axe des y . Les courbes γ

⁶ $\omega_0 = dy = (\alpha = 0, \beta = 1, \delta = 0)$ est la valeur en $0 = (x = 0, y = 0, p = 0)$ de la 1-forme $\omega = dy - pdx = (\alpha = -p, \beta = 1, \delta = 0)$.

sont données comme des fonctions $p = g(x)$, c'est-à-dire comme *enveloppes* de leurs tangentes, et y est calculé par intégration au moyen de l'intégrale $y = \int y' dx = \int p dx$.

On peut montrer que la *courbure* $d\omega$ de la connexion ω est une forme symplectique sur la nouvelle base V/W . C'est évident dans notre cas puisque $d\omega = dx \wedge dp$ est la forme symplectique standard sur le plan de base $\{x, p\} = V/W = B$.

Une connexion \mathcal{C} sur une variété V permet de redéfinir le calcul différentiel en utilisant le transport parallèle par les plans horizontaux de \mathcal{C} . Par exemple, pour la dérivée extérieure des formes différentielles, l'idée clé est de définir la nouvelle opération de dérivation, dite *dérivation covariante*, comme la dérivée extérieure standard restreinte aux \mathcal{C} -composantes des vecteurs tangents. Plus précisément, si $\theta(t_1, \dots, t_k)$ est une k -forme, sa dérivée covariante $D\theta$ est donnée par

$$D\theta(t_1, \dots, t_{k+1}) = d\theta(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{k+1})$$

où \bar{t} est la projection de $t \in T_v V$ sur le plan horizontal (le plan de contact) C_v . Il en va de même pour d'autres entités géométriques. Par exemple, si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles sur V , son *gradient* relatif à \mathcal{C} est donné par

$$\nabla_{\mathcal{C}}(f) = t_1(f)t_1 + t_2(f)t_2$$

où t_1 et t_2 constituent la base invariante à gauche de \mathcal{C} . Par construction, $\nabla_{\mathcal{C}}$ est tangent à la structure de contact \mathcal{C} et définit par conséquent un champ de vecteurs dont les trajectoires sont toutes des courbes intégrales de \mathcal{C} . De même, si $X = \varphi t_1 + \psi t_2$ est un champ de vecteurs de contact (i.e. tangent à \mathcal{C}) sur V , sa *divergence* relative à \mathcal{C} est donnée par

$$\operatorname{div}_{\mathcal{C}} X = t_1(\varphi) + t_2(\psi).$$

Quant au laplacien, il est donné par

$$(2) \quad \Delta_{\mathcal{C}}(f) = \operatorname{div}_{\mathcal{C}}(\nabla_{\mathcal{C}}(f)) = t_1^2(f) + t_2^2(f).$$

Ces structures consistent à partir des structures classiques de gradient, de divergence et de laplacien dans la base de la connexion et à les relever dans les plans horizontaux.

La dérivée covariante du champ caractéristique χ – c'est-à-dire du champ transverse à \mathcal{C} qui satisfait $\omega(\chi) = 1$ – est nulle, ainsi que celle de la métrique sous-riemannienne (cf. la section suivante) $g_{\mathcal{C}}$ sur \mathcal{C} pour laquelle $\{t_1, t_2\}$ est une base orthonormale.

2.10. Géométrie sous-riemannienne. Nous en arrivons maintenant au concept peut-être le plus important de ce chapitre. Une théorie très puissante peut être développée lorsque l'on dispose d'une structure de groupe de Lie V avec une algèbre de Lie \mathcal{V} nilpotente non triviale n'ayant qu'un commutateur non nul $[t_1, t_2] = t_3$ (dans notre cas, $t_1 = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}$, $t_2 = \frac{\partial}{\partial p}$, $t_3 = -\frac{\partial}{\partial y}$) ainsi que d'une 1-forme ω invariante à gauche qui est une forme de contact ($\omega \wedge d\omega \neq 0$). Le champ $t_3 = \chi$ est le champ caractéristique – aussi dit champ de Reeb – du champ \mathcal{C} de plans de contact $\{t_1, t_2\}$.

Ces données définissent des métriques très spéciales sur V appelées par Gromov, Lafontaine et Pansu [243] des métriques de *Carnot-Carathéodory*.⁷ L'idée est de considérer une métrique $g_{\mathcal{C}}$ définie seulement sur les plans de \mathcal{C} – et non pas sur tout le fibré tangent TV comme c'est le cas pour les métriques riemanniennes –, par exemple

⁷Ce nom vient de la théorie des processus adiabatiques en thermodynamique.

la métrique pour laquelle $\{t_1, t_2\}$ est une base orthonormale invariante à gauche, et de se restreindre à la considération de courbes Γ dans V qui sont *tangentes* à \mathcal{C} , autrement dit qui sont des *courbes intégrales* de \mathcal{C} . On distingue par conséquent une classe spéciale de courbes qualifiées d’"admissibles". Soient v et v' deux points de V . Pour tenir compte de la contrainte d’intégrabilité, il est naturel de définir leur distance $d_{\mathcal{C}}(v, v')$ comme l’*inf* des $g_{\mathcal{C}}$ -longueurs des courbes intégrales joignant v à v' . Cette définition est consistante dans la mesure où l’on peut montrer (théorème de Chow) que de telles courbes existent toujours lorsque les crochets de Lie de \mathcal{C} engendrent le fibré tangent complet TV . Plus précisément, on définit $d_{\mathcal{C}}$ par la formule :

$$d_{\mathcal{C}}(v, v') = \inf_{\Gamma \text{ courbe intégrale de } \mathcal{C}, \Gamma(0)=v, \Gamma(1)=v'} \int_I \|\Gamma'(s)\| ds .$$

Une *géodésique* entre v et v' pour la métrique de Carnot-Carathéodory est alors une courbe intégrale de \mathcal{C} qui réalise la distance $d_{\mathcal{C}}(v, v')$.

Une métrique de Carnot-Carathéodory $g_{\mathcal{C}}$ est une "path-metric" appelée *sous-riemannienne* car elle n’est définie que sur le *sous-fibré* \mathcal{C} du fibré tangent TV . Bien sûr, on peut l’étendre à une métrique riemannienne g en posant que le champ caractéristique χ de \mathcal{C} (défini par ω) est unitaire et orthogonal à \mathcal{C} . La structure de contact s’appelle alors une *polarisation* de g . Mais elle est fondamentalement différente de g . On peut la penser comme une *limite* de métriques riemanniennes g_{ε} sur V qui pénalisent de plus en plus le défaut d’intégrabilité des courbes, c’est-à-dire le défaut de tangence à \mathcal{C} , les courbes non intégrales devenant interdites à la limite. Plus précisément, on considère la décomposition $TV = \mathcal{C} \oplus \chi$, une base orthonormale $B_{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} , une base B_{χ} de χ et on prend $B_{\mathcal{C}} \cup \varepsilon B_{\chi}$ comme base orthonormale d’une métrique riemannienne g_{ε} . Le ds_{ε}^2 de g_{ε} est alors $ds_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} ds_{\chi}^2$ et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ les seules courbes admissibles (c’est-à-dire de longueur localement finie) sont de $ds_{\chi}^2 = 0$ et sont donc des courbes intégrales de \mathcal{C} .

La "path-metric" $g_{\mathcal{C}}$ est hautement anisotrope et non homogène, *singulière* et même *fractale*. En effet, on peut montrer que, même si V est topologiquement de dimension 3, sa dimension de Hausdorff relativement à $g_{\mathcal{C}}$ est 4!

Pour notre propos ici, il est très important que la métrique sous-riemannienne $g_{\mathcal{C}}$ soit une limite de métriques riemanniennes g_{ε} de plus en plus anisotropes définies en introduisant des différences de "poids" entre les directions respectivement tangentes et orthogonales aux plans C_v . En effet, nous pouvons facilement implémenter cette différence en posant que les connexions connectant les neurones (a, p) correspondant aux plans de contact C_v sont "fortes", alors que celles connectant des neurones (a, p) correspondant à la direction caractéristique χ_v sont "faibles", voire même inhibitrices.

2.11. Le problème des surfaces "régulières" de V . Si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière sur V , génériquement $f = 0$ définit une surface S de V . Son vecteur normal unitaire relativement à \mathcal{C} au point $v \in S$ est $n_{\mathcal{C}}(v) = \frac{\nabla_{\mathcal{C}}(f)(v)}{\|\nabla_{\mathcal{C}}(f)(v)\|}$. Le vecteur $n_{\mathcal{C}}$ est la projection normalisée sur C_v du vecteur normal unitaire classique $n(v) = \frac{\nabla(f)(v)}{\|\nabla(f)(v)\|}$. Il n’est pas défini si $\nabla_{\mathcal{C}}(f)(v) = 0$, c’est-à-dire si $T_v S = C_v$ en v . De tels points sont appelés *points caractéristiques* de S . Ils existent en général même si S est sans points singuliers au sens classique, c’est-à-dire si $\nabla(f)(v) \neq 0$ partout. Mais, dans la mesure où la structure de contact \mathcal{C} est complètement non intégrable, ils sont nécessairement rares génériquement.

3. Structure de contact et groupe des déplacements du plan

Nous avons considéré jusqu'ici J^1M mais pas $R \times \mathbb{S}^1$. Or les rares neurophysiologistes qui se sont intéressés à la modélisation de $V1$ l'ont identifié non pas à $R \times \mathbb{R} = J^1M$ mais précisément à $R \times \mathbb{S}^1$ (avec pour simplifier $R = \mathbb{R}^2$). Le passage de la tangente p à une variable angulaire θ (avec $p = \tan(\theta)$) conduit à une autre façon, plus naturelle, de penser la structure de contact en utilisant la 1-forme $\omega = -\sin(\theta) dx + \cos(\theta) dy$ et la distribution \mathcal{C} de plans tangents C_vV de T_vV ($v \in V$) définie par $C_vV = \text{Span}\{X_1, X_2\}$ ⁸ avec les deux vecteurs tangents de base $X_1 = \cos(\theta) \partial_x + \sin(\theta) \partial_y$ et $X_2 = \partial_\theta$ dont le crochet de Lie est $[X_1, X_2] = \sin(\theta) \partial_x - \cos(\theta) \partial_y = -X_3$.⁹ La distribution \mathcal{C} des plans de contact est maximale non intégrable car, comme $d\omega = \cos(\theta) dx \wedge d\theta + \sin(\theta) dy \wedge d\theta$, $\omega \wedge d\omega = -dx \wedge dy \wedge d\theta$ ne peut pas être nulle puisque c'est une forme volume. La condition de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$ n'étant pas remplie, il n'existe pas de surface intégrale de \mathcal{C} dans V (mais il existe beaucoup de courbes intégrales de \mathcal{C} : les relevées legendriennes Γ dans V des courbes γ dans R). Quant au champ de vecteurs X_3 c'est le champ caractéristique (champ de Reeb) du champ des plans de contact C_v .

Les deux structures de contact sur J^1M et $R \times \mathbb{S}^1$ se ressemblent beaucoup mais sont néanmoins très différentes. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder les algèbres de Lie. Pour J^1M on a l'algèbre de base $\{t_1, t_2, t_3\}$ ($t_1 = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}$, $t_2 = \frac{\partial}{\partial p}$, $t_3 = -\frac{\partial}{\partial y}$) avec $[t_1, t_2] = t_3$ et $[t_1, t_3] = [t_2, t_3] = 0$. C'est une algèbre nilpotente. En revanche pour $R \times \mathbb{S}^1$ on a l'algèbre de base $\{X_1, X_2, X_3\}$ ($X_1 = \cos(\theta) \partial_x + \sin(\theta) \partial_y$, $X_2 = \partial_\theta$, $X_3 = -\sin(\theta) \partial_x + \cos(\theta) \partial_y$) avec $[X_1, X_2] = -X_3$, $[X_1, X_3] = 0$ et $[X_2, X_3] = -X_1$. Elle n'est pas nilpotente. Nous reviendrons en détail sur ce point à la section 4.7 du chapitre 5 où nous utiliserons une représentation matricielle commode pour faire les calculs. Mais on peut remarquer que pour θ petit, on a au premier ordre $p \sim \theta$, $\sin(\theta) \sim \theta$ et $\cos(\theta) \sim 1$, ce qui fait que $\omega = -\sin(\theta) dx + \cos(\theta) dy$ s'approche par $\omega \sim -\theta dx + dy$ qui est la 1-forme $dy - p dx$. La première structure est donc en quelque sorte “tangente” à la seconde. Nous verrons plus bas à la section 3.3 du chapitre 6 qu'on l'appelle le “cône tangent” de cette dernière.

L'espace $V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ étant isomorphe au groupe de Lie $E(2) = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ des déplacements du plan euclidien, il est alors intéressant de traiter à son tour, comme nous l'avons fait à la section précédente, ce second modèle V comme un groupe de Lie.

Nous avons vu plus haut à la section 2.2 que si (p, r_θ) est un élément de $E(2)$ où p est un point de \mathbb{R}^2 et r_θ la rotation d'angle θ , (p, r_θ) agit sur les points a de \mathbb{R}^2 par

$$(p, r_\theta)(a) = p + r_\theta(a) .$$

Si (p, r_θ) et (q, r_φ) sont deux éléments de $E(2)$, leur produit (non commutatif) est donné par :

$$(q, r_\varphi) \circ (p, r_\theta) = (q + r_\varphi(p), r_{\varphi+\theta}) .$$

⁸On note $\text{Span}\{X_i\}$ le vectoriel engendré (“spanned”) par les X_i .

⁹Nous utilisons la notation X_i plutôt que t_i pour les vecteurs tangents de base afin de ne pas confondre les deux structures de contact.

Si l'on transfère cette multiplication à V on obtient le produit :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \cos(\theta_1) - y_2 \sin(\theta_1) \\ y_1 + x_2 \sin(\theta_1) + y_2 \cos(\theta_1) \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}.$$

L'origine $(0, 0, 0)$ est l'élément neutre et l'inverse de (x, y, θ) est

$$(-x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) - y \cos(\theta), -\theta).$$

L'algèbre de Lie de V est le vectoriel $\mathcal{V} = T_0V \simeq \mathbb{R}^3$ muni du crochet de Lie (où les $t = (\xi, \eta, \tau)$ dénotent de nouveau les vecteurs tangents de T_0V) que l'on pourra comparer à celui du premier modèle :

$$[t, t'] = [(\xi, \eta, \tau), (\xi', \eta', \tau')] = (-\tau\eta' + \eta\tau', \tau\xi' - \xi\tau', 0).$$

Comme dans la section précédente, la translation à gauche L_v définie par $L_v(v') = v.v'$ est un difféomorphisme de V dont l'application tangente en 0 est l'application linéaire :

$$T_0L_v : \quad T_0V \quad \rightarrow \quad T_vV \\ t = (\xi, \eta, \tau) \quad \mapsto \quad T_0L_v(t) = (\xi \cos(\theta) - \eta \sin(\theta), \xi \sin(\theta) + \eta \cos(\theta), \tau).$$

Dans la base non holonome (x, y, θ) la matrice de T_0L_v est donc

$$T_0L_v = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_\theta\}_0$ de T_0V est translatée en v par T_0L_v sur la base de T_vV

$$\{\cos(\theta) \partial_x + \sin(\theta) \partial_y = X_1, -\sin(\theta) \partial_x + \cos(\theta) \partial_y = X_3, \partial_\theta = X_2\}_v$$

et que donc la base $\{X_1, X_2, X_3\}$ est invariante à gauche.

De même, si l'on translate à gauche la valeur en 0, $\omega_0 = dy$, de la 1-forme $\omega = -\sin(\theta) dx + \cos(\theta) dy$, on obtient, puisque $\omega_v = T_0L_v^*(\omega_0)$ est définie par $\omega_v(t') = \omega_0(T_0L_v^{-1}(t'))$ pour $t' = (\xi', \eta', \tau') \in T_vV$, que

$$T_0L_v^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que

$$T_0L_v^{-1}(t') = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi' \cos(\theta) + \eta' \sin(\theta) \\ -\xi' \sin(\theta) + \eta' \cos(\theta) \\ \tau' \end{pmatrix},$$

la 1-forme invariante à gauche

$$\omega_v(t') = dy(T_0L_v^{-1}(t')) = -\xi' \sin(\theta) + \eta' \cos(\theta) = -\sin(\theta) dx + \cos(\theta) dy$$

qui n'est rien d'autre que ω . Cette dernière est donc bien invariante à gauche.

En revenant de v en 0 par la translation à droite $R_{v^{-1}}$, on obtient l'automorphisme intérieur :

$$A_v : v' \mapsto v.v'.v^{-1}$$

$$v.v'.v^{-1} = \begin{pmatrix} x + (x' \cos(\theta) - x \cos(\theta')) - (y' \sin(\theta) - y \sin(\theta')) \\ y + (x' \sin(\theta) - x \sin(\theta')) + (y' \cos(\theta) - y \cos(\theta')) \\ \theta' \end{pmatrix}.$$

Évidemment 0 est un point fixe de A_v et l'application tangente $Ad_v = T_0 A_v$ de A_v en 0 est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{V} = T_0 V$ qui définit la représentation adjointe. On a

$$Ad_v = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & y \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En reprenant l'application tangente de la représentation adjointe on obtient un morphisme d'algèbres de Lie, ad_t , de l'algèbre de Lie \mathcal{V} dans l'algèbre de Lie $End(\mathcal{V})$ de $Aut(\mathcal{V})$. Si $t = (\xi, \eta, \tau) \in \mathcal{V} = T_0 V$, la matrice de ad_t est

$$ad_t = \begin{pmatrix} 0 & -\tau & \eta \\ \tau & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi le crochet de Lie par $ad_t(t') = (-\tau\eta' + \eta\tau', \tau\xi' - \xi\tau', 0) = [t, t']$.

Nous reviendrons plus bas à la section 4.8 du chapitre 5 sur cette structure et nous expliciterons les orbites des représentations adjointe et coadjointe.

4. Structures de contact et vision

Jusqu'ici, pratiquement aucun spécialiste de la vision n'a vraiment analysé les relations frappantes qui existent entre les hypercolonnes d'orientation du cortex visuel primaire et les notions géométriques de fibration, d'espace de jets, ou de structure de contact. Mais il y a heureusement des exceptions. Nous avons déjà cité plusieurs fois les travaux de Jan Koenderink (cf. ci-dessus la section 3.4 du chapitre 2). Il y a également William Hoffman, l'un des pionniers de l'application de la géométrie différentielle et de la théorie des groupes de Lie à la vision. En particulier dans son important article de 1989 "The visual cortex is a contact bundle" [141], il a formulé explicitement l'idée que les contours sont des relèvements de discontinuités du stimulus rétinien dans un fibré de contact rétino-topique implémenté dans les hypercolonnes corticales. Selon lui, ce que les neurobiologistes appellent des "projections" rétine \rightarrow cortex sont en fait de tels "path liftings" :

"A path on one manifold [the retina] is 'lifted' via a fibering to another manifold [the cortex] in a coherent fashion." (p. 145)

Dans un autre travail Hoffman [140] a aussi évoqué le concept de fibration et conclu :

"Fibrations (...) are certainly present and operative in the posterior perceptual system if one takes account of the presence of 'orientation' micro-response fields and the columnar arrangement of cortex." (p. 645)

Il a également introduit l'idée que les champs récepteurs rétiniens fournissent des cartes locales, les applications de changement de cartes entre cartes se recouvrant étant implémentées dans la connectivité fine de la rétine.

Nous pouvons également citer à nouveau Steve Zucker et les travaux de Paul Bressloff, Jack Cowan et Martin Golubitsky auxquels nous consacrerons le chapitre 9.