Chapitre 1

Étude des systèmes mécaniques

1.1 Paramètrage des systèmes

On considère un système Σ formé d'un ou de plusieurs corps rigides S_I (ou indéformables). La position de chaque corps rigide est définie par celle de son centre de gravité G_I, et son orientation est donnée par celle d'un trièdre D_I attaché à son centre de gravité. On note $\underline{e}_{I\alpha}$ les trois vecteurs définissant le trièdre D_I.

Un point M du solide S_I est repéré par trois coordonnées ξ^α relativement à ce repère, ainsi

$$\underline{G_I M}(t) = \sum_\alpha \xi^\alpha \underline{e}_{I\alpha}(t). \tag{1.1}$$

La position de chaque corps rigide est ainsi définie par six paramètres, notés q_I^i, $i = 1$ à 6. Ces paramètres correspondent au mouvement de corps solide :

- trois degrés de liberté de translation : q_I^i pour $i = 1$ à 3 représentent les coordonnées du centre de gravité G_I dans le repère de l'observateur,

$$\underline{OG_I}(t) = q_I^i(t)\underline{e}_i, \tag{1.2}$$

- trois degrés de liberté de rotation du corps solide : ces paramètres définissent la position du trièdre D_I par rapport au repère de l'observateur :

$$\boldsymbol{R}(t) = \sum_{\alpha=1,3} \underline{e}_{I\alpha}(t) \otimes \underline{e}_\alpha. \tag{1.3}$$

Les paramètres q dépendent du temps. La position d'un point M du solide S_I est donc paramètrée par les coordonnées relatives du point considéré par

rapport au solide auquel il appartient et la configuration du solide à l'instant t. Le mouvement de chaque point du système est ainsi lié au mouvement du solide auquel il appartient. La position actuelle d'un point est définie comme $\underline{X}(\xi^\alpha, q_I^i(t))$.

On notera $\underline{q}$ le vecteur formé par l'ensemble des paramètres permettant de décrire la position du système Σ.

La vitesse d'un point M quelconque du système Σ est alors définie par

$$\underline{v}(M) = \sum_l \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^l} \frac{dq^l}{dt}. \tag{1.4}$$

Afin alléger les écritures, on utilisera la convention de sommation sur les indices répétés. Ainsi l'expression de la vitesse s'écrit

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^l} \frac{dq^l}{dt} = \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{q}} . \frac{\mathrm{d}\,\underline{q}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.5}$$

La particule élémentaire de masse $dm(M)$ possède une énergie cinétique de la forme

$$\frac{1}{2}\underline{v}^2(M)\; dm(M),$$

l'énergie cinétique du corps S_I est alors obtenue par intégration sur le solide

$$\mathcal{K}_I = \int_{S_I} \frac{1}{2}\underline{v}^2(M)\; dm(M). \tag{1.6}$$

De même, on obtient l'énergie cinétique du système :

$$\mathcal{K} = \int_\Sigma \frac{1}{2}\underline{v}^2(M) dm(M) = \sum_I \mathcal{K}_I. \tag{1.7}$$

Reportons la forme du champ de vitesse obtenue comme fonction du vecteur $\underline{q}$ des paramètres dans cette expression, l'énergie cinétique du système se met alors sous la forme

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{q}^i \Big(\int_\Sigma \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^i} . \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^j} dm \Big) \quad \dot{q}^j = \frac{1}{2}\dot{q}^i m_{ij}(q^k)\dot{q}^j. \tag{1.8}$$

L'opérateur $\boldsymbol{m}$ ainsi défini est l'opérateur d'inertie qui est ici supposé défini positif.

La mobilité du système. La mobilité d'un système est décrite par l'ensemble des mouvements virtuels définis par des champs de vecteurs $\underline{v}^*(M)$ appelés vitesses virtuelles. Les mouvements virtuels sont définis sur la configuration actuelle caractérisée par la position actuelle de tous les points du système.

Définition : *Le système est paramètré par les seuls $q_I^l(t)$, les vitesses virtuelles sont les champs de vecteurs définis par*

$$\underline{v}^*(M) = \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^i}\, q^{*i} = \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{q}} \cdot \underline{q}^*, \tag{1.9}$$

où les paramètres q^{*i} sont quelconques.

Remarque : Le champ de vitesse virtuelle est défini par morceaux. Chaque solide S_I ayant la mobilité d'un corps rigide. Soit M appartenant à S_I, la vitesse virtuelle du point M est $\underline{v}^*(M) = \underline{v}^*(G_I) + \underline{\omega}_I^* \wedge \underline{G_I M}$.

1.2 Principe des puissances virtuelles

Dans tout mouvement virtuel, la somme de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $\mathcal{P}_i(\underline{v}^*)$ et de la puissance virtuelle des efforts extérieurs $\mathcal{P}_e(\underline{v}^*)$ égale la puissance des quantités d'accélération $\mathcal{A}(\underline{v}^*)$:

Bilan des Puissances.

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}^*) + \mathcal{P}_e(\underline{v}^*) = \mathcal{A}(\underline{v}^*).$$

Mouvement rigidifiant. Dans tout mouvement virtuel rigidifiant le système, la puissance des efforts intérieurs est nulle.

Remarque : Ces relations sont satisfaites non seulement pour le système dans son ensemble, mais aussi pour chacun des sous systèmes.

Pour construire une représentation des efforts intérieurs pour le système, il est nécessaire de se donner la forme de chaque puissance[1].

[1] Une puissance est une application qui à un champ de vitesse (vecteur) associe un scalaire, elle s'exprime donc comme une forme linéaire sur l'espace des champs de vitesse.

Puissance des quantités d'accélération. Par définition la puissance des quantités d'accélération est :

$$\mathcal{A}(\underline{v}^*) = \int_\Sigma \underline{\gamma}(M) \cdot \underline{v}^*(M)\, dm(M) = \int_\Sigma \underline{\gamma}(M) \cdot \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^i} q^{*i}\, dm(M) = \Gamma_i q^{*i}.$$

$dm(M)$ est la masse élémentaire attachée au point courant M. Comme nous avons

$$\underline{\gamma}(M) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{q}^k \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^k}),$$

et ainsi

$$\underline{\gamma}(M) \cdot \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}(\dot{q}^k \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^i}) - \dot{q}^k \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^k} \cdot \frac{d}{dt}(\frac{\partial \underline{M}}{\partial q^i}),$$

ce qui devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}(\frac{1}{2}\dot{q}^k \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^j}\dot{q}^j)\right) - \frac{\partial}{\partial q^i}(\frac{1}{2}\dot{q}^k \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial \underline{M}}{\partial q^j}\dot{q}^j),$$

d'où le résultat

$$\Gamma_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i}\Big) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q^i}. \tag{1.10}$$

Ces équations forment les équations de Lagrange des quantités d'accélération.

Puissance des efforts intérieurs et extérieurs. Etudions la forme des autres puissances, la puissance des efforts intérieurs permet de caractériser les interactions entre les éléments constitutifs du système, la puissance des efforts extérieurs permet de prendre en compte la façon dont le système réagit avec le milieu qui l'entoure.

Chacun des solides S_I composant le système est rigide. La puissance des efforts intérieurs des solides rigides est nulle dans tout mouvement défini par (1.9).

Prenons un solide S_I particulier, ce solide est en interaction avec ses voisins par des actions de contact et en interaction avec le monde extérieur par des efforts donnés.

Soit $\underline{\Phi}$ un champ de vecteur défini sur S_I, la puissance de ce champ de vecteur dans le champ de vitesse virtuelle $\underline{v}^*$ est la forme linéaire :

$$\mathcal{P}(\underline{v}^*) = \int_{S_I} \underline{\Phi}(M^I) \cdot \underline{v}^*(M^I)\, dm(M). \tag{1.11}$$

Le corps S_I étant rigide, le champ $\underline{v}^*$ sur S_I est défini par un distributeur

$$\underline{v}^*(M) = \underline{v}^*(G) + \underline{\omega}^* \wedge \underline{GM}.$$

Sur chaque corps solide, la puissance associée au champ de vecteur $\underline{\Phi}$ se réduit à la forme

$$\mathcal{P}(\underline{v}^*) = \int_{S_I} \underline{\Phi}(M^I) \cdot \underline{v}^*(M^I)\rho(M^I)\ \mathrm{d}\omega = \underline{\mathcal{R}}_G \cdot \underline{v}^*(G) + \underline{\mathcal{M}}_G \cdot \underline{\omega}^* \qquad (1.12)$$

ainsi elle est définie à l'aide uniquement du torseur résultant des efforts appliqués[2].

Pour le système Σ considéré comme un assemblage de corps rigides, chaque puissance des efforts extérieurs pour chaque corps pris séparément se réduit au produit scalaire d'un torseur par un distributeur.

Actions de contact. Considérons, maintenant, deux corps rigides en contact ponctuel au point P. Sur chacun des solides, exprimons le principe des puissances virtuelles :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e^I(\underline{v}_I^*) &= \underline{\mathcal{R}}_P^I \cdot \underline{v}_I^*(P) + \underline{\mathcal{M}}_P^I \cdot \underline{\omega}_I^*(P) = \mathcal{A}^I(\underline{v}_I^*), \\ \mathcal{P}_e^{II}(\underline{v}_{II}^*) &= \underline{\mathcal{R}}_P^{II} \cdot \underline{v}_{II}^*(P) + \underline{\mathcal{M}}_P^{II} \cdot \underline{\omega}_{II}^*(P) = \mathcal{A}^{II}(\underline{v}_{II}^*), \end{aligned}$$

et de plus :

$$\mathcal{P}_e^I(\underline{v}_I^*) + \mathcal{P}_e^{II}(\underline{v}_{II}^*) = \mathcal{A}(\underline{v}^*) = \mathcal{A}^I(\underline{v}_I^*) + \mathcal{A}^{II}(\underline{v}_{II}^*). \qquad (1.13)$$

Dans la puissance des efforts extérieurs séparons les forces extérieures au système et les efforts de contact entre les solides S_I et S_{II}.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ee}^I(\underline{v}_I^*) + \mathcal{P}_{ee}^{II}(\underline{v}_{II}^*) + \mathcal{P}_{II}^I(\underline{v}_I^*) + \mathcal{P}_I^{II}(\underline{v}_{II}^*) &= \mathcal{A}(\underline{v}^*) \\ &= \mathcal{A}^I(\underline{v}_I^*) + \mathcal{A}^{II}(\underline{v}_{II}^*). \end{aligned} \qquad (1.14)$$

[2]Les éléments de réduction du distributeur au point G des vitesses $(\underline{v}^*(G), \underline{\omega}^*(G)$ vérifient des relations d'invariance :

$$\underline{v}^*(M) = \underline{v}^*(G) + \underline{\omega}^* \wedge \underline{GM}, \quad \underline{\omega}^*(M) = \underline{\omega}^*(G)\ ;$$

ces relations fournissent par dualité celles d'invariance pour le torseur des efforts :

$$\underline{\mathcal{M}}_M = \underline{\mathcal{M}}_G + \underline{GM} \wedge \underline{\mathcal{R}}_G, \quad \underline{\mathcal{R}}_M = \underline{\mathcal{R}}_G\ .$$

On remarque ainsi que les actions de contact entre les deux solides représentent des efforts intérieurs pour le système Σ.

Prenons un mouvement virtuel rigidifiant le système. Ce qui s'exprime ici par :

$$\underline{v}_I^*(P) = \underline{v}_{II}^*(P); \quad \underline{\omega}_I^*(P) = \underline{\omega}_{II}^*(P). \tag{1.15}$$

Dans ce mouvement, les efforts intérieurs ne travaillent pas et la puissance associée est nulle.

On en déduit alors que le torseur des efforts que le solide S_{II} exerce sur S_I est opposé au torseur des actions de contact que S_I exerce sur S_{II}.

Ainsi la puissance des actions de contact entre S_I et S_{II} est de la forme

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}^*) = \underline{\mathcal{R}}_P \cdot (\underline{v}_I^*(P) - \underline{v}_{II}^*(P)) + \underline{\mathcal{M}}_P \cdot (\underline{\omega}_I^*(P) - \underline{\omega}_{II}^*(P)). \tag{1.16}$$

La forme de la puissance des efforts de contact est ainsi déterminée. Des données supplémentaires sur cette puissance caractérisent le comportement de la liaison entre les deux solides.

Dans le cas d'une liaison ponctuelle immuable, les points M^I et M^{II} restent en contact au cours du temps $\underline{OM}^I = \underline{OP}(t) = \underline{OM}^{II}$. Pour tout mouvement compatible avec cette liaison, nous avons $\underline{v}_I(P) - \underline{v}_{II}(P) = 0$ et ainsi la puissance est réduite à celle associée au moment.

Cas général. Les puissances virtuelles sont par définition des formes linéaires définies sur les champs de vitesse $\underline{v}^*$ définis par les équations (1.9). Ces puissances se mettent respectivement sous la forme :

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}^*) = -Q_i q^{*i}; \quad \mathcal{P}_e(\underline{v}^*) = T_i q^{*i}. \tag{1.17}$$

Cette forme réduite est due au choix de la description du mouvement du système à l'aide d'un nombre fini de paramètres $q_I^i, i = 1,6; I = 1,n$. Les quantités Q_i et T_i sont des efforts généralisés. On obtient ainsi les équations du mouvement sous la forme :

$$-Q_i + T_i = \Gamma_i. \tag{1.18}$$

Ces efforts généralisés permettant d'écrire à tout instant la conservation de la quantité de mouvement se réduisent donc à des forces associées aux degrés de liberté de translation et à des moments associés aux degrés de liberté de rotation.

Afin de résoudre les équations du mouvement, il est nécessaire de caractériser le comportement du système, relation entre mouvement et effort. Dans

le cas d'un assemblage de corps rigides, ces relations se réduisent aux relations de comportement des liaisons entre les différents corps rigides et celles associées aux interactions entre le système et l'extérieur.

De façon générale les efforts Q_i, T_i dépendent de la position q^i et de la vitesse $\dot{q}^i$ des sous systèmes. Les efforts intérieurs sont définis pour des comportements particuliers de liaison entre les corps solides : liaison élastique, liaison avec frottement,... De même, les efforts extérieurs peuvent dépendre de la position et de la vitesse du corps pour exprimer par exemple les efforts imposés par le mouvement d'un fluide, ou bien des efforts de réaction sur des obstacles fixes. Les efforts imposés au système peuvent être décrits par un ensemble de paramètres de chargement dénotés λ lesquels sont fonctions du temps.

Ainsi les équations du mouvement sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Gamma_i(\underline{\ddot{q}}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}) &= m_{ij}(\underline{q})\ddot{q}^j + B_{ij}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})\dot{q}^j + C_{ij}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})q^j \\ &= -Q_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) + T_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \lambda(t)). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Comme l'inertie est un opérateur défini positif, posant $\underline{X} = (\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ la forme générale des équations du mouvement devient :

$$\dot{\underline{X}} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{X}, t, \lambda). \tag{1.20}$$

Cette expression formelle permet d'utiliser le cadre des équations différentielles du premier ordre pour étudier les propriétés des solutions des équations du mouvement.

1.3 Équations de Lagrange du mouvement.

Dans le cas de systèmes rigides, la puissance des efforts intérieurs est nulle pour chacun des corps rigides. La puissance des efforts intérieurs au système se réduit à la puissance des efforts de liaison et d'interaction entre les corps rigides.

Lorsque les interactions entre les solides et les forces extérieures dérivent de fonctions potentielles $W(q^i)$, $V(q^i, \lambda)$, les puissances se mettent sous la forme :

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}^*) = -Q_i q^{*i} = -\frac{\partial W}{\partial q^i} q^{*i}, \tag{1.21}$$

$$\mathcal{P}_e(\underline{v}^*) = T_i q^{*i} = \frac{\partial V}{\partial q^i} q^{*i}. \tag{1.22}$$

Le principe des puissances virtuelles se résume à

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q^i} = \Gamma_i, \tag{1.23}$$

où l'énergie $\mathcal{E}(\underline{q}, \lambda)$ est l'énergie potentielle du système :

$$\mathcal{E}(\underline{q}, \lambda) = W(\underline{q}) - V(\underline{q}, \lambda). \tag{1.24}$$

Soit encore, en reportant les expressions (1.10) des quantités d'accélération :

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i}\Big) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q^i} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q^i} = 0. \tag{1.25}$$

Définissons le Lagrangien $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{L}(\underline{\dot{q}}, \underline{q}) = \mathcal{K}(\underline{\dot{q}}, \underline{q}) - \mathcal{E}(\underline{q}, \lambda), \tag{1.26}$$

les équations du mouvement se mettent ainsi sous la forme condensée :

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0. \tag{1.27}$$

De plus, multiplions l'équation (1.25) par $\dot{q}^i$, nous obtenons :

$$\dot{q}^i\Big(\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i}\Big) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q^i} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q^i}\Big) = 0, \tag{1.28}$$

par intégration par parties, nous avons :

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{q}^i\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i}\Big) - \ddot{q}^i\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d\mathcal{K}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0. \tag{1.29}$$

soit encore

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{q}^i\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}^i} - \mathcal{K} + \mathcal{E}\Big) = 0. \tag{1.30}$$

Comme l'énergie cinétique vérifie :

$$\mathcal{K}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2}\,\underline{\dot{q}}.\boldsymbol{m}(\underline{q}).\underline{\dot{q}}, \tag{1.31}$$

on en déduit que l'énergie totale est conservée :

$$\mathcal{K}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) + \mathcal{E}(\underline{q}, \lambda) = E. \tag{1.32}$$

Les positions d'équilibre sous les paramètres de chargement λ se déduisent des équations du mouvement et rendent stationnaire l'énergie potentielle. Les positions d'équilibre vérifient :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q^i}(\underline{q}^e, \lambda) = 0. \tag{1.33}$$

Dans le cas où on peut résoudre ce système d'équations, on obtient les courbes d'équilibre $(\underline{q}^e(\lambda), \lambda)$.

1.4 Étude du système linéarisé

Dans le cas général, les efforts intervenant dans les puissances sont des fonctions des paramètres et des vitesses $q^i, \dot{q}^i$, et les équations du mouvement se mettent sous la forme

$$\Gamma_i(\underline{\ddot{q}}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}) = -Q_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) + T_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \lambda), \tag{1.34}$$

la linéarisation de ces équations autour de la position $\underline{q}^e$ conduit à l'expression :

$$m_{ij}\ddot{q}^j + \gamma_{ij}\dot{q}^j + \beta_{ij}q^j = 0. \tag{1.35}$$

Les opérateurs $\boldsymbol{\gamma}$ et $\boldsymbol{\beta}$, a priori quelconques, se décomposent en parties symétrique $(\boldsymbol{\gamma}_S, \boldsymbol{\beta}_S)$ et antisymétrique $(\boldsymbol{\gamma}_A, \boldsymbol{\beta}_A)$. Chaque cas de symétrie confère au système linéarisé des propriétés particulières de comportement.

Cas dissipatif. A $\boldsymbol{\gamma}_S$ correspond un quasi-potentiel de dissipation associé de type viscosité $\phi(\underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2}\dot{q}^i\gamma^S_{ij}\dot{q}^j$.

Forces gyroscopiques. Les forces $\boldsymbol{\gamma}_A.\underline{\dot{q}}$ sont de type gyroscopiques, elles ne donnent aucune puissance dans les mouvements réels.

Forces conservatives. Les forces $\boldsymbol{\beta}^S.\underline{q}$ sont conservatives et dérivent d'un potentiel

$$V(q) = \frac{1}{2}q^i\beta^S_{ij}q^j.$$

Forces circulatoires. Les forces $\boldsymbol{\beta}^A.\underline{q}$ sont circulatoires, elles génèrent une énergie par cycle : en effet pour une évolution cyclique des paramètres $q^i = a^i cos\omega t + b^i sin\omega t$, l'énergie par cycle

$$\int_O^{\frac{2\pi}{\omega}} \beta^A_{ij}q^j\dot{q}^i dt = \pi\beta^A_{ij}(a^jb^i - a^ib^j), \tag{1.36}$$

n'est pas nulle.

C'est le cas en particulier de forces suiveuses responsables d'instabilité par flottement dont l'illustration est l'instabilité due à la force du vent sur un voile mince tenu élastiquement.

Remarque : On peut montrer que

- les positions d'équilibre instables pour un système à forces conservatives peuvent être stabilisées à l'aide de forces gyroscopiques,
- l'introduction de la viscosité ou de frottement visqueux n'a pas toujours un rôle stabilisateur.

Pour mettre en évidence ces effets, le système unidimensionnel n'est pas suffisant, la symétrie ou la non symétrie des opérateurs $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ jouant un rôle fondamental et déterminant.

Avant d'illustrer ces particularités, intéressons nous au système linéarisé à un degré de liberté. Cette étude permet d'introduire une première définition de la stabilité.

1.5 Définition de la stabilité

La stabilité au sens de Liapounov d'une solution d'une équation différentielle vectorielle de la forme :

$$\dot{\underline{X}} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{X}, t), \tag{1.37}$$

est définie par un ensemble de propriétés qui caractérisent d'une part une mesure d'une perturbation des conditions initiales et d'autre part la distance entre les solutions obtenues, initialement proches, au cours du temps.

Soient deux solutions de ce système, l'écart entre les solutions à chaque instant peut être donné par

$$\| \underline{X}(t) - \underline{X}^*(t) \| = (\sum_i |x^i(t) - x^{*i}(t)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $\underline{X}^*(t)$ une solution de l'équation $\dot{\underline{X}} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{X}, t)$, alors :

1. $\underline{X}^*(t)$ est stable pour $t \geq t_o$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \\ \| \underline{X}(t_o) - \underline{X}^*(t_o) \| < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \| \underline{X}(t) - \underline{X}^*(t) \| < \epsilon \quad \forall t \geq t_o. \end{aligned}$$

2. Si l'équation différentielle ne dépend pas explicitement du temps, la valeur de t_o importe peu, car les solutions sont invariantes par translation suivant l'axe des temps. La solution sera stable ou instable quelque soit la valeur de t_o.

3. Dans les autres cas, la solution $\underline{X}^*(t)$ est instable au sens de Liapounov.

4. Si une solution $\underline{X}^*(t)$ est stable pour $t \geq t_o$ et si α est indépendant de la valeur t_o la solution est uniformément stable pour $t \geq t_o$.

5. Soit une solution $\underline{X}^*(t)$ stable (ou uniformément stable) pour $t \geq t_o$. Si

$$\exists \eta(t_o) > 0, \| \underline{X}(t_o) - \underline{X}^*(t_o) \| < \eta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \| \underline{X}(t) - \underline{X}^*(t) \| = 0,$$

alors la solution est asymptotiquement stable (ou uniformément asymptotiquement stable).

Remarque : Si une valeur indépendante du temps $\underline{X}(t) = \underline{X}_e$ est solution de l'équation différentielle vectorielle pour tout t, $\underline{X}_e$ est une position d'équilibre du système, la définition de la stabilité au sens de Liapounov s'applique encore et conduit à l'étude de la stabilité de la position d'équilibre $\underline{X}_e$.

Nous allons dans un premier temps, exploiter cette définition de la stabilité au sens de Liapounov sur le cas le plus simple, c'est à dire le système linéaire à coefficients constants.

1.6 Le système dynamique linéaire.

Dans le cas d'un système à un seul degré de liberté, on cherche à qualifier la stabilité de la position d'équilibre. Pour cela, on perturbe le système par des données initiales et on étudie la réponse à cette perturbation au cours du temps. L'équation linéarisée du mouvement autour de la position d'équilibre q_e, $(q = q_e + x)$, dans le cas d'un système à un seul degré de liberté est de la forme :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \tag{1.38}$$

On peut la présenter sous l'écriture d'un système linéaire vectoriel du premier ordre

$$\dot{\underline{X}} = \boldsymbol{A}.\underline{X}, \tag{1.39}$$

où $\boldsymbol{A}$ est un matrice 2×2 à coefficients réels constants.
En effet, en posant $y = \dot{x}$, le système (1.38) devient

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{1.40}$$

Un tel système est un *système linéaire autonome*, car l'équation différentielle (1.39) ne dépend pas explicitement du temps.
Les équations linéarisées (1.35) nous incitent à considérer le cas d'un système dynamique linéaire défini sur R^n et caractérisé par un opérateur $\boldsymbol{A}$ constant.

Définition : *Deux solutions de (1.39), ϕ_1 et ϕ_2, sont linéairement indépendantes si pour tout t, la relation $c_1\phi_1(t)+c_2\phi_2(t)=0$ implique que les constantes c_1 et c_2 sont nulles.*

Propriétés 1 *La solution du système avec les conditions initiales $\underline{X}(t_o) = \underline{X}_o$ est donnée par*

$$\underline{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t).\mathbf{\Phi}(t_o)^{-1}.\underline{X}_o, \tag{1.41}$$

où $\mathbf{\Phi}$ est une matrice fondamentale du système, c'est à dire une matrice composée de n vecteurs solutions linéairement indépendants. $\mathbf{\Phi} = [\phi_1, ..., \phi_n]$.

L'opérateur linéaire $\boldsymbol{A}$ possède une représentation en terme de sous espaces, sur lesquels la restriction de $\boldsymbol{A}$ possède une forme simple. Ces sous-espaces sont associés aux valeurs propres de $\boldsymbol{A}$. En effet, soit μ est une valeur propre de $\boldsymbol{A}$ et un vecteur propre $\underline{X}$ associé. Le vecteur $\underline{X}$ satisfait $\boldsymbol{A}.\underline{X} = \mu\,\underline{X}$. Les sous-espaces associés à chaque valeur propre sont stables par $\boldsymbol{A}$.

Pour obtenir l'ensemble des solutions, on forme le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$

$$P(\mu) = \det(\boldsymbol{A} - \mu\,\boldsymbol{I}). \tag{1.42}$$

Les valeurs propres μ de $\boldsymbol{A}$ sont les racines du polynôme caractéristique P.

Supposons que les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ sont toutes distinctes ; la matrice $\boldsymbol{A}$ est réduite à une forme diagonale après un changement de base bien choisi. Le système linéaire se réduit alors à n équations différentielles ordinaires du premier ordre, dont les solutions sont de la forme : $\phi_i = r_i e^{\mu_i t}$.

Définition : *Par analogie, on notera la matrice fondamentale sous la forme e^{At} :*

$$e^{\boldsymbol{A}(t-t_o)} \equiv \mathbf{\Phi}(t).\mathbf{\Phi}(t_o)^{-1}. \tag{1.43}$$

Propriétés 2 *La matrice fondamentale possède les propriétés suivantes :*

- $e^{\boldsymbol{A}(t+s)} = e^{\boldsymbol{A}t}.e^{\boldsymbol{A}s}$
- $(e^{\boldsymbol{A}t})^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}t}$
- $\frac{d}{dt}(e^{\boldsymbol{A}t}) = e^{\boldsymbol{A}t}.\boldsymbol{A}$
- $e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n t^n$

Remarque : Si les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ commutent, alors $e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t} = e^{\boldsymbol{A}t}.e^{\boldsymbol{B}t}$.

Théorème 1 *Pour les cas de valeurs propres μ_i de multiplicité $m \leq n$, il existe m solutions linéairement indépendantes du système $\dot{\underline{X}} = \boldsymbol{A}.\underline{X}$, de la forme*

$$\phi_i^p = p_p(t)e^{\mu_i t} \tag{1.44}$$

où $p_p(t)$ sont des polynômes de t de degré inférieur à m.

Stabilité au sens de Liapounov de la position d'équilibre $\underline{X} = 0$. Une solution particulière des équations d'évolution est la position d'équilibre $\underline{X} = 0$ et étudions les petits mouvements autour de cette position.

Dans le cas où la position $\underline{X} = 0$ est stable, pour une perturbation $\underline{X}(0)$ initiale "petite" de cet équilibre, l'évolution dynamique du mouvement sera "proche" de cette position à partir d'un temps t_o. Pour le système linéarisé considéré, la caractérisation de la stabilité est obtenue par la résolution du système différentiel (1.39) pour des conditions initiales $\underline{X}(0)$ données.

L'étude du système dynamique linéaire repose sur les propriétés de l'opérateur constant $\boldsymbol{A}$ représenté par sa matrice. La matrice $\boldsymbol{A}$ est réduite sous sa forme de Jordan. Pour chaque valeur propre μ, la matrice de Jordan réduite est de la forme $\hat{\boldsymbol{A}} = \mu\, \boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}$, ($\boldsymbol{N}$ est nilpotent). L'opérateur $e^{t\boldsymbol{A}}$ reste borné lorsque $t \to \infty$ sous l'une des conditions[3] :

1. ou bien $\Re\mu < 0$,
2. ou bien $\Re\mu = 0$ et $\boldsymbol{N}$ est la matrice nulle.

Ces deux propriétés fournissent des conditions nécessaires de stabilité pour le système linéarisé.

Théorème 2 *Soit $\boldsymbol{A}$ un opérateur constant pour le système $\dot{\underline{x}} = \boldsymbol{A}.\underline{x}$, avec des valeurs propres μ_i, $(i = 1, 2..., n)$.*

- *Si la solution $\underline{x}(t) = 0$ est stable, alors $\Re\mu_i \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$*
- *Si, pour chaque i, ou bien $\Re\mu_i < 0$ ou bien $\Re\mu_i \leq 0$ et 0 n'est pas valeur propre multiple, alors la position $\underline{x}(t) = 0$ est uniformément stable.*
- *La position $\underline{x}(t) = 0$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\Re\mu_i < 0$.*
- *S'il existe un i tel que $\Re\mu_i > 0$, la position d'équilibre $\underline{x}(t) = 0$ est instable.*

[3] On note $\Re\mu$ la partie réelle de μ

Diagrammes de phase du système linéaire à un degré de liberté. Pour un système défini par une matrice $\boldsymbol{A}$ carrée 2×2, les matrices de Jordan sont facilement représentées, elles se mettent sous trois formes différentes suivant la nature des valeurs propres et des espaces propres associés.

Cas A : Les valeurs propres sont réelles distinctes. La matrice représentative dans les espaces propres est alors diagonale :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}. \tag{1.45}$$

Les solutions du problème dynamique se mettent sous la forme

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} e^{\mu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\mu_2 t} \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_o. \tag{1.46}$$

Le diagramme des courbes solutions est présenté sur la figure (Fig. 1) pour des valeurs propres négatives. Les trajectoires dans l'espace des phases tendent vers l'origine, l'origine est une position d'équilibre stable.

Si l'une des valeurs propres est positive, la position d'équilibre $\underline{x} = 0$ est instable.

Ces résultats sont conservés pour une valeur propre réelle double dont l'espace propre est de dimension 2. En particulier, pour la valeur propre double $\mu = 0$, la matrice fondamentale est la matrice identité, ce qui implique la stabilité, (prendre $\alpha = \varepsilon$ pour la définition de la stabilité).

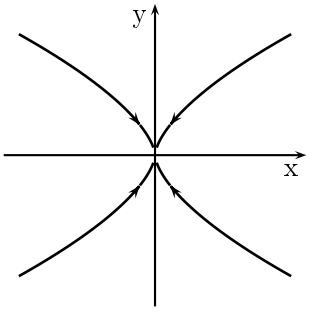

FIG. 1: Cas A : deux valeurs propres réelles distinctes. ($\mu_i < 0$)

Cas B : La valeur propre réelle est double et l'espace propre est de dimension un. La matrice A se met sous la forme :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}. \tag{1.47}$$

La matrice fondamentale du système prend alors la valeur

$$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\mu t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.48}$$

Les mouvements sont représentés sur le diagramme (Fig. 2).

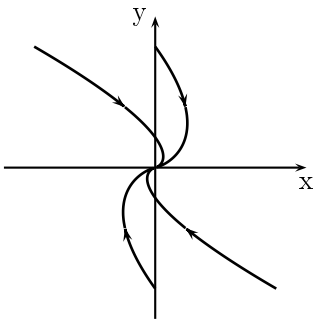

FIG. 2: Cas B : une valeur propre réelle double, $\mu < 0$.

La figure (Fig. 2), prise pour $\mu < 0$, montre que la seule position d'équilibre est le point $(0, 0)$ et que cette position d'équilibre est stable.

Pour $\mu = 0$, le diagramme des trajectoires dans l'espace des phases montre que tout point de l'axe $y = 0$ est une position d'équilibre, et que les autres solutions sont les droites $y = Cst$. La position d'équilibre $\underline{X} = 0$ est instable. Enfin si $\mu > 0$, les diagrammes obtenus sont identiques aux diagrammes pour les valeurs de μ négatives en changeant le sens du temps. La représentation est obtenue par une symétrie par rapport à l'axe $y = 0$. En effet, les solutions s'écrivent respectivement en considérant $\mu_o > 0$:

$$\mu = -\mu_o < 0, \quad \underline{x}_1 = e^{-\mu_o t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix},$$

$$\mu = \mu_o > 0, \quad \underline{x}_2 = e^{\mu_o t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = e^{-\mu_o \tau} \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{bmatrix}.$$

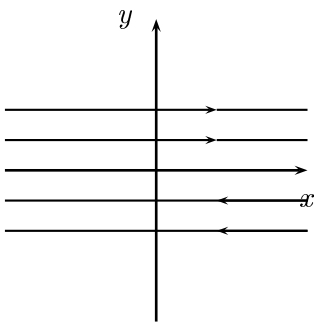

FIG. 3: Cas B : la valeur propre est $\mu = 0$.

pour passer d'une situation à l'autre, il suffit de changer t en $-t$ et y en $-y$. Dans le dernier cas, l'origine est alors instable, on peut même parler d'instabilité par divergence.

Cas C: Les valeurs propres sont complexes conjuguées. La matrice $\boldsymbol{A}$ se met sous la forme

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}. \tag{1.49}$$

On ne considère que les solutions à valeurs réelles, lesquelles s'écrivent :

$$\underline{x} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_o. \tag{1.50}$$

Les représentations du mouvement dans l'espace des phases sont présentées sur le diagramme (Fig. 4). Pour $\alpha < 0$, on obtient la stabilité asymptotique de la position d'équilibre $(0,0)$. Les trajectoires dans l'espace des phases sont des spirales convergentes vers l'origine.

Pour $\alpha > 0$ les spirales sont obtenues en inversant le sens de t, ce qui montre une instabilité de la position d'équilibre $(0,0)$ par divergence.

Pour $\alpha = 0$, les courbes sont des ellipses centrées à l'origine, l'origine est un "centre" . L'équilibre $(0,0)$ est stable.

Étude générale pour une matrice A quelconque. Soit un quadruplet a, b, c, d de nombre réels, définissant l'opérateur A :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{1.51}$$

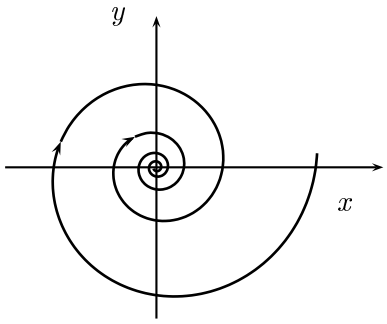

FIG. 4: Cas C : valeurs propres complexes conjuguées.

Pour cet opérateur, le polynôme caractéristique est

$$P(\mu) = \mu^2 - (a+d)\mu + ad - bc, \tag{1.52}$$

dont le discriminant est

$$\delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc). \tag{1.53}$$

La somme des racines et le produit des racines valent respectivement

$$S = a + d, \quad P = ad - bc. \tag{1.54}$$

Ce qui détermine la stabilité de la position $\underline{x} = 0$ selon le tableau

	S	P	δ	
point instable	-	< 0	> 0	V
noeud stable	< 0	> 0	> 0	III
spirale stable	< 0	> 0	< 0	I
noeud instable	> 0	> 0	> 0	IV
spirale instable	> 0	> 0	< 0	II
centre stable	0	> 0	< 0	
dégénéré stable	< 0	> 0	0	
dégénéré instable	> 0	> 0	0	

Une présentation graphique des résultats est donnée par le diagramme ()

Décomposition de Jordan. Dans le cas où les deux valeurs propres réelles sont distinctes, il existe alors deux vecteurs propres $\underline{X}_1$ et $\underline{X}_2$.

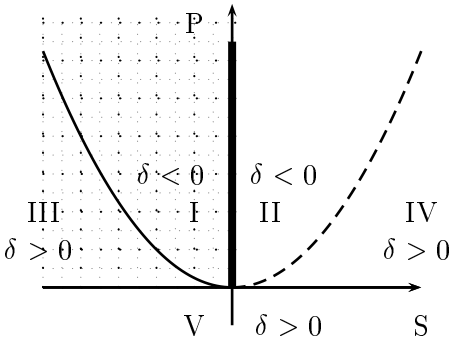

FIG. 5: Diagramme de stabilité de l'origine pour le système linéaire. I) Spirale stable, II) Spirale instable, III) Noeud stable, IV) Noeud instable, V) Point selle instable.

Soit $\boldsymbol{P}$ la matrice : $\boldsymbol{P} = [\underline{X}_1 \quad \underline{X}_2]$ alors

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{P} = [\mu_1 \underline{X}_1 \quad \mu_2 \underline{X}_2] = \boldsymbol{P}.\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix},$$

d'où la décomposition de Jordan pour le cas A. Lorsque les deux valeurs propres réelles sont confondues, ou bien l'espace des vecteurs propres est de dimension 2 et on retrouve le cas précédent, ou bien l'espace propre est de dimension 1. Plaçons-nous dans ce cas, soit $\underline{X}_1$ un vecteur propre de $\boldsymbol{A}$, désignons par $\underline{X}_2$ la solution de l'équation :

$$(\boldsymbol{A} - \mu\, \boldsymbol{I})\, \underline{X}_2 = \underline{X}_1,$$

le vecteur $\underline{X}_2$ existe car la matrice $(\boldsymbol{A} - \mu\, \boldsymbol{I})$ ne peut être la matrice nulle, le noyau de $(\boldsymbol{A} - \mu\, \boldsymbol{I})$ étant de dimension un.

Formons la matrice $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = [\underline{X}_1 \quad \underline{X}_2],$$

alors

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} = [\mu\, \underline{X}_1 \quad \mu\, \underline{X}_2 + \underline{X}_1] = \boldsymbol{P} \cdot \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

d'où le résultat pour le cas B.

Pour le système dynamique à un seul degré de liberté, la matrice $\boldsymbol{A}$ est telle que :

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -\frac{k}{m} = -\Omega^2, \quad d = -\frac{c}{m} = -C.$$

En présence de viscosité $C \geq 0$, les propriétés de l'équation caractéristique sont :

$$P > 0, \quad S < 0, \quad \delta = C^2 - 4\Omega^2.$$

Les réponses possibles correspondent aux cas $(III), (I)$ et dégénéré stable.

Une interprétation directe de ces résultats peut être obtenue en considérant les vibrations libres du système à un seul degré de liberté. En effet, l'équation dynamique se réduit à la forme

$$M\ddot{q} + Kq = 0, \tag{1.55}$$

pour le système non amorti. Les pulsations propres satisfont à

$$\omega_o^2 = \frac{K}{M}, \tag{1.56}$$

et l'espace des solutions est défini par

$$q = A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t. \tag{1.57}$$

Pour des conditions initiales $q(0) = q_o$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_o$, la solution est

$$q(t) = q_o\cos\omega_o t + \frac{\dot{q}_o}{\omega_o}\sin\omega_o t. \tag{1.58}$$

Dans le cas du système amorti par une viscosité $C > 0$, on définit l'amortissement δ comme la quantité $\dfrac{C^2}{4MK}$. Les racines de l'équation caractéristique sont définies suivant la valeur des paramètres.

- Pour un petit amortissement $\delta < 1$, $C^2 < 4MK$,

$$s_\pm = \frac{-C \pm i\sqrt{4MK - C^2}}{2M}. \tag{1.59}$$

Le mouvement est périodique amorti de la forme :

$$q(t) = e^{-\frac{Ct}{2M}}(A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t), \tag{1.60}$$

la pulsation ω_c est plus faible que la pulsation du mouvement non amorti :

$$\omega_c^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{4M^2} < \frac{K}{M} = \omega_o^2. \tag{1.61}$$

- Pour la viscosité critique, $C^2 = 4MK$, $\delta = 1$, la partie imaginaire s'annule. La valeur propre est double, $s_i = -\dfrac{C}{2M}$. La solution est de la forme
$$q(t) = (At + B)e^{-\frac{C}{2M}t}. \tag{1.62}$$

- Pour une viscosité forte $C^2 > 4MK$, c'est à dire un fort amortissement $\delta > 1$; les valeurs propres sont réelles négatives
$$s_\pm = -\frac{C}{2M} \pm \frac{\sqrt{C^2 - 4MK}}{2M}, \tag{1.63}$$
et la solution est
$$q(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}. \tag{1.64}$$

1.7 Mouvement entretenu

On considère le mouvement entretenu d'un système à un degré de liberté par une force périodique :

$$M\ddot{q} + Kq = f\cos\Omega t. \tag{1.65}$$

Pour une pulsation d'excitation Ω différente de la pulsation propre ω des vibrations libres, l'espace des solutions est de la forme :

$$q(t) = \frac{f}{M(\omega^2 - \Omega^2)}\cos\Omega t + A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{1.66}$$

où A et B sont déterminées par les conditions initiales.

Pour un système initialement au repos, nous avons ainsi :

$$q(t) = \frac{f}{M(\omega^2 - \Omega^2)}(\cos\Omega t - \cos\omega t), \tag{1.67}$$

il s'agit donc de vibrations libres et de vibrations forcées superposées. On constate, sur la solution générale, que l'amplitude des vibrations forcées est indépendante des conditions initiales. On peut, à partir de la forme obtenue, étudier différents régimes.

- Pour $\Omega \ll \omega$, on obtient un mouvement de vibration ω autour de la position "quasistatique" $\frac{f}{M\omega^2}\cos\Omega t$.

- Pour $\Omega \gg \omega$, l'amplitude des vibrations forcées est alors très faible.
- Pour $\Omega \simeq \omega$, on pose $\Omega = \omega + 2\epsilon$, et le mouvement se met sous la forme[4]

$$q(t) = \frac{f}{2M\epsilon(\omega+\epsilon)} \sin \epsilon t \quad \sin\big((\omega+\epsilon)t\big). \tag{1.68}$$

  Pour ϵ petit, l'amplitude varie lentement avec la pulsation ϵ, nous avons un phénomène de battements autour de la pulsation ω.

- Enfin pour $\Omega = \omega$,

$$q(t) = \frac{f}{2M\omega} t \sin \omega t + A \cos \omega t + B \sin \omega t, \tag{1.69}$$

  l'amplitude croît linéairement, il s'agit de la résonance.

Le même raisonnement peut être fait en présence d'amortissement, car pour le système amorti :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f \cos \Omega t, \tag{1.70}$$

nous avons :

$$q(t) = \frac{f}{\sqrt{(K - M\Omega^2)^2 + C^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi), \quad \tan \phi = \frac{\Omega C}{K - M\Omega^2}. \tag{1.71}$$

L'amplitude demeure finie pour toute valeur de Ω. Le maximum d'amplitude est atteint pour une pulsation Ω inférieure à la pulsation ω.

1.8 Méthode directe d'analyse de stabilité

Soit un système où les efforts intérieurs et les sollicitations extérieures dérivent de potentiels, qui ne dépendent pas explicitement du temps. La forme de ces potentiels est ainsi immuable. Les systèmes mécaniques soumis à ces conditions sont dits conservatifs et ont des propriétés particulières. Leurs évolutions sont gouvernées par le système des équations de Lagrange obtenues à l'aide de la fonctionnelle de Lagrange comme nous l'avons remarqué au début de ce chapitre.

Pour ce cas particulier, les positions d'équilibre rendent stationnaire l'énergie potentielle du système sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles. Les systèmes conservatifs ne dissipent aucune énergie et donc l'énergie totale du système se conserve :

$$E(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \lambda) = \mathcal{K} + \mathcal{E} = \mathcal{K}(\underline{q}(0), \dot{\underline{q}}(0)) + \mathcal{E}(\underline{q}(0), \lambda). \tag{1.72}$$

[4] $\cos(p+q) - \cos(p-q) = -2\sin(p)\sin(q)$

En effet,

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{K}+\mathcal{E}) = \frac{d}{dt}(\mathcal{L}+2\mathcal{E}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}}.\dot{\underline{q}} + 2\mathcal{E}). \tag{1.73}$$

Les différentes énergies ne dépendent pas explicitement du temps. L'énergie cinétique vérifie alors la propriété

$$\mathcal{K}(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}.\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\underline{q}}}. \tag{1.74}$$

En reportant cette valeur dans l'équation de conservation de l'énergie, on déduit alors l'intégrale première du mouvement sous la forme de la conservation de l'énergie totale du système. Ce constat nous permet d'établir la propriété :

Propriétés 3 *Pour tout instant $t > 0$, l'énergie potentielle est bornée par la valeur initiale de l'énergie totale, car l'énergie cinétique est positive :*

$$\forall t > 0, \quad \mathcal{E}(\underline{q},\lambda) \leq \mathcal{K}(\underline{q}(0),\dot{\underline{q}}(0)) + \mathcal{E}(\underline{q}(0),\lambda). \tag{1.75}$$

Cette propriété établie, nous pouvons énoncer le théorème de Lejeune-Dirichlet :

Théorème 3 (Lejeune-Dirichlet) *Si, pour la position d'équilibre $(\underline{q}^e(\lambda),\lambda)$, l'énergie potentielle possède un minimum strict, alors cette position d'équilibre est stable.*

Démonstration. Une position d'équilibre est définie par la stationnarité de l'énergie potentielle :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}^e,\lambda) = 0. \tag{1.76}$$

Si l'énergie possède un minimum strict en $q_e(\lambda)$, nous avons

$$\begin{aligned} & \forall \quad \epsilon > 0, \ \| \ \underline{v}(0) \ \| < \epsilon, \ \exists \eta > 0, \\ 0 \leq G(\underline{v},\lambda) \ &= \ \mathcal{E}(\underline{q}^e(\lambda)+\underline{v},\lambda) - \mathcal{E}(\underline{q}^e,\lambda) \\ &= \ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \underline{q}^e \partial \underline{q}^e}\cdot(\underline{v}\ \underline{v}) + o(\underline{v}) < \eta \Rightarrow \| \ \underline{v}(t) \ \| < \epsilon. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Le résultat est alors immédiat, l'énergie cinétique est une forme quadratique de $\dot{q}$, que l'on peut choisir comme norme sur les vitesses. On a alors

$$\forall \quad \eta > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \| \ \underline{v}(0) \ \| < \alpha, \quad \mathcal{K}(0) < \alpha \tag{1.78}$$

$$\Rightarrow \quad \forall t, G(\underline{v},\lambda) = \mathcal{E}(\underline{q}^e + \underline{v},\lambda) - \mathcal{E}(\underline{q}^e,\lambda) < \eta. \tag{1.79}$$

Le théorème de Lejeune-Dirichlet ne donne aucun renseignement sur la trajectoire. C'est uniquement une caractérisation de la perte de stabilité pour le système conservatif, qui précise la notion de stabilité de Liapounov dans le cas où les valeurs propres du mouvement linéarisé sont des imaginaires purs. Insistons encore sur la nécessité d'être dans le cas conservatif.

1.8.1 Forces dissipatives et gyroscopiques

On considère le cas où les forces circulatoires sont nulles. Les forces appliquées au système dépendent d'un potentiel $V(\underline{q})$ qui est une forme quadratique au voisinage de l'équilibre 0. Le théorème de Lejeune-Dirichlet pour un système conservatif repose sur le fait que l'énergie totale est conservée au cours du mouvement.

Si on superpose des forces dissipatives et des forces gyroscopiques, on a dans le mouvement réel, en vertu du théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt}E(\underline{q},\dot{\underline{q}}) = -2\phi(\dot{\underline{q}}) \leq 0.$$

On peut même conclure que la position d'équilibre est asymptotiquement stable.

1.8.2 Approche directe de Liapounov

L'idée essentielle de cette approche est de construire une fonction analogue à celle de l'énergie totale du cas conservatif pour un système quelconque. On s'aperçoit dans le paragraphe précédent que, d'une certaine manière, il faut, pour assurer la stabilité d'une position d'équilibre, qu'il existe un domaine autour de cette position pour lequel toute trajectoire obtenue avec des conditions initiales proches de l'équilibre ne puisse sortir de ce domaine.

Pour fixer les idées, prenons la fonction $V(x,y) = x^2 + y^2$ comme mesure de la distance à l'origine dans le plan de phase $(x, y = \dot{x})$.

Soit un système dynamique de la forme $\dot{\underline{X}} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{X},\lambda)$, évaluons la norme $V(t) = \frac{1}{2} \parallel \underline{X}(t) \parallel^2$, alors nous avons la propriété suivante

$$\frac{dV}{dt} = \underline{X}.\underline{\mathcal{F}}(\underline{X},\lambda). \tag{1.80}$$

Cette remarque peut être illustrée sur le système dynamique linéaire à coefficient constant précédemment étudié.

En effet, pour ce système, l'opérateur A qui intervient dans l'étude de la stabilité de la position d'équilibre $(0,0)$ doit avoir ses valeurs propres μ_1, μ_2

telles que la condition $\frac{dV}{dt} < 0$ soit satisfaite pour assurer la stabilité de la position $(0,0)$ au sens de Liapounov. Au point X du plan de phase,

1. Si $\frac{dV}{dt} > 0$, le point à tendance à sortir de l'équipotentielle $V = V(X)$.
2. Si $\frac{dV}{dt} = 0$, le point reste sur l'équipotentielle V.
3. Si $\frac{dV}{dt} < 0$, le point entre à l'intérieur du domaine limité par l'équipotentielle.

Cette caractérisation géométrique permet d'établir des conditions de stabilité pour des équations dynamiques complexes. Cependant la méthode nécessite de trouver une fonction V adaptée à chaque espace de paramétrisation.

Définition : *Soit $V(\underline{X})$ une fonction continue dérivable et à dérivée continue sur un voisinage Ω de l'origine, telle*

1. *$V(0) = 0$, $V > 0$ sur Ω,*
2. *$\exists \mu > 0$ tel que pour toute valeur d'un paramètre $\alpha < \mu$, l'équation $V(\underline{X}) = \alpha$ défini une surface unique Γ_α entourant l'origine.*

Une telle fonction V définit un système topographique, (surface équipotentielle ou iso-V) et est appelée fonction de Liapounov.

Propriétés 4 *Soit une fonction V de Liapounov et soit un mouvement tel que la fonction*

$$\frac{dV}{dt} = \underline{X}.\underline{\mathcal{F}}(\underline{X}, \lambda) \leq 0 \text{ dans } \Omega, \tag{1.81}$$

et Γ_α la surface définie par $V = \alpha$.

1. *Tout trajet commençant en un point intérieur à Γ_α ne peut sortir du domaine défini par l'intérieur de cette surface.*
2. *Si l'origine est un point d'équilibre, alors cet équilibre est uniformément stable au sens de Liapounov.*

Propriétés 5 *Soit une fonction V de Liapounov et soit un mouvement tel que la fonction*

$$\frac{dV}{dt} = \underline{X}.\underline{\mathcal{F}}(\underline{X}, \lambda) < 0 \text{ dans } \Omega, \tag{1.82}$$

et Γ_α la surface définie par $V = \alpha$.

1. *Alors tout trajet commençant en un point intérieur à Γ_α ne peut sortir du domaine défini par l'intérieur de cette surface.*
2. *Il n'y a aucune autre position d'équilibre dans Ω que l'origine.*
3. *Le domaine Ω ne peut contenir de trajectoire fermée.*
4. *L'origine est un point d'équilibre, cet équilibre est asymptotiquement et uniformément stable au sens de Liapounov.*

Théorème 4 *Soit un voisinage Ω de l'origine,*

1. $\dot{\underline{X}} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{X})$ *est un système régulier et* $\underline{X}(0) = 0$,
2. $V(\underline{X})$ *est continue et strictement positive* $V(\underline{X}) > 0, \forall \underline{X} \neq 0$,
3. $\dot{V}(\underline{X})$ *est continue et négative* $\dot{V}(\underline{X}) \leq 0, \quad (resp. < 0), \forall \underline{X} \neq 0$,

alors l'origine est une position d'équilibre uniformément stable, (resp. asymptotiquement stable).

Remarque : La définition de la stabilité au sens de Liapounov est ainsi étendue. En effet une position d'équilibre q_o est stable si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \begin{cases} \| q(0) - q_o \| < \alpha, \\ \| \dot{q}(0) \| < \alpha, \end{cases} \Rightarrow \forall t > 0, \| q(t) - q_o \| < \epsilon. \tag{1.83}$$

Soit V une fonction de Liapounov, prenons $V_o \leq \| q(0) - q_o \| + \| \dot{q}(0) \| < 2\alpha$ alors si $V_t \geq \| q(t) - q_o \|$ la position d'équilibre est stable.
En effet les propriétés énoncées sur V assure que

$$\| q(0) - q_o \| + \| \dot{q}(0) \| \geq V_o \geq V_t \geq \| q(t) - q_o \| . \tag{1.84}$$

Test d'instabilité. Il résulte de ce qui précède qu'il est parfois plus facile de caractériser l'instabilité que la stabilité. En effet soit une fonction U défini sur un voisinage Ω de l'origine. Supposons U continue dérivable et à dérivée continue et telle que $U(0) = 0$ et $\dot{U} > 0$ pour $\underline{X} \neq 0$. Alors si, dans tout voisinage de l'origine, il existe au moins un point pour lequel $U > 0$ alors l'équilibre à l'origine est instable.

Le cas conservatif. Pour les systèmes conservatifs, considérons comme fonction de Liapounov l'énergie totale du système :

$$V = \mathcal{K} + \mathcal{E}. \tag{1.85}$$

Les résultats sur la stabilité de la position d'équilibre $(0, 0)$ sont alors immédiats.

Le cas du système à un d.d.l. Soit le système à deux dimensions

$$\dot{\underline{x}} = \boldsymbol{A}.\underline{x} + \underline{h}(\underline{x}), \tag{1.86}$$

où $\boldsymbol{A}$ est un opérateur constant :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{1.87}$$

Nous allons construire dans un premier temps une fonction de Liapounov pour le système linéaire associée ($\dot{\underline{x}} = \boldsymbol{A}.\underline{x}$) de la forme :

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T.\boldsymbol{K}.\underline{x}. \tag{1.88}$$

La condition porte sur la dérivée de la fonction pour toute trajectoire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V = \dot{\underline{x}}^T.\boldsymbol{K}.\underline{x} + \underline{x}^T.\boldsymbol{K}.\dot{\underline{x}} = \underline{x}^T.\left[\boldsymbol{A}^T.\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}.\boldsymbol{A}\right].\underline{x}. \tag{1.89}$$

Peut-on trouver $\boldsymbol{K}$ défini positif tel que $\boldsymbol{A}^T.\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}.\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I}$?

Recherchons $\boldsymbol{K}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{K} = m(\boldsymbol{A}^T)^{-1}.\boldsymbol{A}^{-1} + n\,\boldsymbol{I}, \tag{1.90}$$

$p = a + d$, $\delta = ad - bc$, alors $m = -\delta/2p$, $n = 1/2p$ et nous avons :

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2p\delta}\begin{bmatrix} c^2 + d^2 + \delta & -(ac + bd) \\ -(ac + bd) & a^2 + b^2 + \delta \end{bmatrix}. \tag{1.91}$$

Alors la fonction de Liapounov prend la forme

$$V(\underline{x}) = -\frac{1}{2p\delta}((dx - by)^2 + (cx - ay)^2 + \delta(x^2 + y^2)). \tag{1.92}$$

Cette fonction est positive au moins pour $p < 0, \delta > 0$ ce qui confirme le diagramme de stabilité pour le système à un degré de liberté.

Pour le système non linéaire, si $\underline{h}(\underline{x}) = O(x^2 + y^2)$ quand $(x^2 + y^2) \to 0$ la position d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable. En effet

$$\dot{V} = -(x^2 + y^2) + 2\underline{h}^T.\boldsymbol{K}.\underline{x}. \tag{1.93}$$

Compte tenu de la condition sur h, il existe un voisinage de l'origine tel que la partie dominante de $\dot{V}$ soit le premier terme. Donc dans le domaine $p < 0$, $\delta > 0$, la fonction V est une fonction de Liapounov et le système linéarisé assure que $(0, 0)$ est une position d'équilibre asymptotiquement stable.

Le système à n ddl. Pour le système à n degrés de liberté et une fonction $\underline{h}$ s'annulant à l'origine, un résultat identique peut être obtenu dans le cas où le système linéarisé est asymptotiquement stable.

La matrice $\boldsymbol{K}$ est obtenue comme :

$$\boldsymbol{K} = \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}^T t} e^{\boldsymbol{A} t} dt. \tag{1.94}$$

En effet,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\boldsymbol{A}^T t} e^{\boldsymbol{A} t} dt = \boldsymbol{A}^T.\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}.\boldsymbol{A}. \tag{1.95}$$

D'où le résultat, car $\left[e^{\boldsymbol{A}^T t} e^{\boldsymbol{A} t}\right]_0^\infty = -\boldsymbol{I}$. Comme précédemment

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^t.\boldsymbol{K}.\underline{x} \text{ et } \dot{V} = -\underline{x}^T.\underline{x} + 2\underline{h}^T.\boldsymbol{K}.\underline{x}. \tag{1.96}$$

Alors, nous avons l'estimation

$$2 \parallel \underline{h}^T.\boldsymbol{K}.\underline{x} \parallel < 2 \parallel \underline{h} \parallel \parallel\parallel \boldsymbol{K} \parallel\parallel \underline{x} \parallel . \tag{1.97}$$

Supposons que

$$\lim_{\parallel \underline{x} \parallel \to 0} \frac{\parallel \underline{h} \parallel}{\parallel \underline{x} \parallel} = 0, \tag{1.98}$$

alors pour tout ϵ, il existe δ tel que

$$\parallel \underline{x} \parallel < \delta \Rightarrow \parallel \underline{h} \parallel < \epsilon \parallel \underline{x} \parallel . \tag{1.99}$$

Donc pour $\epsilon < \frac{1}{4\|\boldsymbol{K}\|}$, on a

$$\parallel \underline{x} \parallel < \delta \Rightarrow \parallel 2\underline{h}^T.\boldsymbol{K}.\underline{x} \parallel < \frac{1}{2} \parallel \underline{x} \parallel^2, \tag{1.100}$$

ainsi, dans ce domaine, V est une fonction de Liapounov qui vérifient la condition de décroissance.

Théorème 5 (Liapounov) *Soit un système à n degrés de liberté,* $\dot{\underline{x}} = \boldsymbol{A}.\underline{x} + \underline{h}(\underline{x})$ *où* $\boldsymbol{A}$ *est un opérateur constant régulier et tel que*

- *la solution* $\underline{X}$*=0, du système* $\dot{\underline{X}} = \boldsymbol{A}.\underline{X}$ *est asymptotiquement stable ;*
- $\underline{h}(0) = 0$ *et* $\lim_{\parallel \underline{y} \parallel \to 0} \frac{\parallel \underline{h}(\underline{y}) \parallel}{\parallel \underline{y} \parallel} = 0$,

alors $\underline{x}(t) = 0$, $\forall t > t_o$ *pour tout* t_o *est une solution asymptotiquement stable du système non linéaire* $\dot{\underline{x}} = \boldsymbol{A}.\underline{x} + \underline{h}$.

1.9 Autre définition de la stabilité

Revenons sur le système à un degré de liberté. Considérons le cas où $C = 0$, pour ce cas le système est stable au sens de Liapounov, la nature du trajet dans l'espace des phases est un cercle. Pour une viscosité $C > 0$ non nulle, les trajectoires dans l'espace des phases se transforment en des spirales tendant vers l'origine.

On souhaite être capable de savoir si le diagramme de phases reste qualitativement inchangé quand le second membre de l'équation de la dynamique du système est perturbé.

Soit le système dynamique

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{x}), \tag{1.101}$$

et $\underline{s}(\underline{x})$ une autre fonction vectorielle de la position $\underline{x}$, que l'on suppose bornée $\| \underline{s} \| < M$ et à dérivée bornée $\| \dfrac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{x}} \| < M$. Si pour toute fonction $\underline{s}$, il existe une valeur ϵ telle que

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{x}), \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\mathcal{F}}(\underline{x}) + \epsilon \underline{s}(\underline{x}), \tag{1.102}$$

les diagrammes de phases sont similaires, le système est dit *structurellement stable*. En fait la similarité des diagrammes est entendue au sens d'une équivalence topologique des trajectoires représentée par l'existence d'homéomorphismes (transformations continues et inversibles) préservant le sens de parcours le long des trajectoires lequel est ainsi identique pour toute fonction $\underline{s}(\underline{x})$.

En ce sens le système sans viscosité n'est pas structurellement stable, toute viscosité transformant les cercles en spirales. En revanche tous les systèmes présentant une viscosité positive sont de même nature topologique.

Conclusions

Nous avons introduit, pour les systèmes discrets, la formulation générale des équations du mouvement. Puis la linéarisation des équations du mouvement a été utilisée pour obtenir une première caractérisation de la stabilité d'une position d'équilibre.

L'étude du système linéaire à coefficients constants a permis de donner une première classification des diagrammes de stabilité autour de la position d'équilibre. L'étude des valeurs propres de l'opérateur linéaire A permet de conclure sur la stabilité de la position d'équilibre $(0, 0)$.

Dans le cas d'un système mécanique, la première étape est de construire l'opérateur A pour une position d'équilibre et l'analyse de l'équation linéarisée du mouvement autour de cet état peut alors être utilisée pour caractériser l'évolution d'une petite perturbation autour de cet état.

Cette étude doit ainsi être menée en deux étapes. Premièrement, pour un chargement donné, il convient de trouver la ou les positions d'équilibre du système. Lorsque le système est non-linéaire, cette caractérisation est loin d'être immédiate.

Ensuite, pour étudier la stabilité de cette ou de ces positions, on sera amené à donner une définition plus large de la notion de stabilité d'une position d'équilibre pour le système et à préciser dans quelle mesure l'étude de la stabilité au travers de la linéarisation du système dynamique est suffisante pour assurer la stabilité d'une position d'équilibre du système non-linéaire.

Dans un premier temps, on propose de considérer un système mécanique à un degré de liberté afin de comprendre les rôles des différentes sources de non-linéarités provenant soit du comportement de la matière qui constitue la structure, soit de l'évolution géométrique au cours du mouvement. On étudie ensuite les petits mouvements autour de chaque position d'équilibre. Enfin, on présente une méthode systématique d'approche de la stabilité des positions d'équilibre et de la détermination des points de bifurcation.