
CHAPITRE 1

Résolution approchée de problèmes d'équilibre en élasticité

Les structures mécaniques sont susceptibles de présenter des comportements très divers, selon les caractéristiques de leurs matériaux constitutifs, les chargements subis, la nature des liaisons entre éléments structuraux... Le concept d'élément fini fournit, comme on le verra au long de ce cours, un cadre générique permettant la définition de méthodes de calcul approché des structures dans toute leur diversité, adaptées à la prise en compte de configurations géométriques complexes et de comportements variés.

Le modèle de comportement le plus simple à prendre en compte est celui de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP), traité en détail dans le cours de Mécanique des milieux continus (Salençon, 2004; Le Tallec, 2006). Beaucoup de matériaux vérifient ces hypothèses pour des chargements « pas trop élevés », tels que les contraintes sont en tout point dans un *domaine d'élasticité* dont la définition précise dépend du matériau (Suquet, 2004). Le modèle de comportement élastique linéaire HPP est très important pour les applications, car les conditions de fonctionnement de nombre de structures pratiques doivent être telles que leur réponse reste dans le domaine élastique.

Il est donc naturel d'aborder la problématique de la résolution approchée des équations de la mécanique des solides déformables en se restreignant, dans un premier temps, au cas de l'élasticité linéaire HPP. Ce chapitre introductif a pour but de poser les bases nécessaires à l'introduction de la méthode des éléments finis dans ce cadre. Il s'appuie sur des rappels des équations de l'équilibre en élasticité linéaire tridimensionnelle sous leur formes locale (section 1.1) et faible résultant du principe des puissances virtuelles (section 1.2). La résolution par éléments finis s'appuie alors soit sur cette formulation faible, soit sur les principes variationnels de l'élasticité linéaire, déjà traités en Mécanique des milieux continus (Salençon, 2004; Le Tallec, 2006) mais retrouvés ici à partir de la notion d'erreur en relation de comportement (section 1.3). On présente alors en section 1.4 la méthode de Galerkin, une procédure générique de résolution approchée par minimisation d'énergie, et le lien entre formulations variationnelles et faibles est précisé. L'extension de l'approche variationnelle à des conditions aux limites plus générales fait enfin l'objet de la section 1.6.1

1.1 Rappel des équations de l'équilibre d'un solide élastique

On considère un solide occupant dans son état naturel le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Le matériau constitutif est supposé élastique linéaire, et on se place dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP).

1.1.1 Équations de champ et conditions aux limites

L'équilibre du solide dans les conditions ainsi définies, sollicité par des densités de forces de volume \underline{f} , des déplacements \underline{u}^D imposés sur une partie S_u de sa frontière $\partial\Omega$ et une densité surfacique d'efforts \underline{T}^D sur la partie complémentaire S_T de $\partial\Omega$, est décrit par des champs de déplacement \underline{u} , de déformation $\underline{\varepsilon}$ et de contrainte $\underline{\sigma}$ gouvernés par les équations locales

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \nabla^T\underline{u})(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega), \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{div}\underline{\sigma}(\underline{x}) + \rho\underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad (\underline{x} \in \Omega), \quad (1.1b)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathcal{A}:\underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega) \quad (1.1c)$$

et les conditions aux limites

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^D(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in S_u), \quad (1.1d)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^D(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in S_T). \quad (1.1e)$$

Il est nécessaire que les surfaces S_u et S_T forment une partition de $\partial\Omega$, c'est-à-dire vérifient $S_u \cup S_T = \partial\Omega$, $S_u \cap S_T = \emptyset$; on dit alors que les conditions aux limites sont *bien posées*, au sens où elles garantissent l'existence et l'unicité de la solution en contrainte et en déformation. De plus, le déplacement solution \underline{u} n'est unique que si les données cinématiques interdisent tout mouvement rigide (voir Salençon, 2004), ce qui est en particulier vrai dès que la surface S_u est de mesure non nulle. Les conditions (1.1d,e) ne sont pas les seules possibles : on peut par exemple imposer des conditions exprimant l'existence d'un plan de symétrie (voir section 1.6.1) ou la périodicité (liaisons entre déplacements sur deux faces opposées). Dans tous les cas, les conditions aux limites doivent être telles que, en tout point de $\partial\Omega$, trois relations indépendantes entre des composantes du déplacement et du vecteur-contrainte soient imposées.

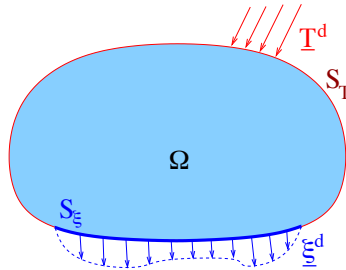


Figure 1.1: Équilibre HPP d'un solide élastique : notations.

Les équations (1.1a–e) constituent ce qu'on appelle parfois la *formulation forte* du problème d'équilibre en élasticité (par opposition aux *formulations faibles* introduites aux sections 1.2 et 1.3). Elles relèvent, comme pour tout modèle de milieu continu, de trois catégories essentielles :

- (i) Équations de compatibilité cinématique : (1.1a,d);
- (ii) Équations d'équilibre : (1.1b,e);
- (iii) Équation de comportement : (1.1c).

1.1.2 Ensembles de champs admissibles

Pour marquer et mettre en œuvre la distinction ci-dessus, il est utile d'introduire les ensembles de champs admissibles par rapport aux données du problème considéré. L'ensemble $\mathcal{C}(\underline{u}^D)$ des déplacements *cinématiquement admissibles* avec les déplacements imposés \underline{u}^D est alors défini par

$$\mathcal{C}(\underline{u}^D) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \text{ continu et régulier sur } \Omega \text{ et } \underline{v} = \underline{u}^D \text{ sur } S_u \}, \quad (1.2)$$

tandis que l'ensemble $\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})$ des contraintes *statiquement admissibles* avec les efforts imposés $(\underline{T}^D, \underline{f})$ est défini par

$$\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) = \{ \underline{\tau} \mid \operatorname{div} \underline{\tau} + \rho \underline{f} = 0 \text{ dans } \Omega, \underline{\tau} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \text{ sur } S_T \}. \quad (1.3)$$

À ces définitions déjà connues (Salençon, 2004), il est commode d'ajouter celle de l'ensemble $\mathcal{C}(\underline{0})$ des déplacements cinématiquement admissibles à zéro :

$$\mathcal{C}(\underline{0}) = \{ \underline{w} \mid \underline{w} \text{ continu et régulier sur } \Omega \text{ et } \underline{w} = \underline{0} \text{ sur } S_u \} \quad (1.4)$$

et de désigner simplement par \mathcal{C} l'ensemble des champs de déplacement admissibles sans condition sur la frontière :

$$\mathcal{C} = \{ \underline{w} \mid \underline{w} \text{ continu et régulier sur } \Omega \}. \quad (1.5)$$

Les définitions (1.2), (1.4) et (1.5) stipulent que tout déplacement est continu, traduisant l'hypothèse que le matériau se déforme en restant continu¹. Pour éviter des possibilités « pathologiques » et en tout cas peu physiques, on exige de plus une certaine régularité. Une formulation forte du type (1.1a–e) requiert *a priori* des déplacements admissibles deux fois continûment différentiables par morceaux². Pour les besoins de l'approximation par éléments finis, on peut se contenter d'une hypothèse de régularité un peu moins contraignante :

$$\underline{v} \text{ et } \nabla \underline{v} \text{ sont de carré intégrable sur } \Omega. \quad (1.6)$$

Comme on le verra en section 1.3, cette condition³ exprime essentiellement l'hypothèse d'une énergie de déformation finie.

Une reformulation plus compacte du problème (1.1a–e) gouvernant l'équilibre d'un solide élastique est alors

$$\text{trouver } (\underline{u}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \times \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) \text{ tels que } \underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathcal{A} : \underline{\varepsilon}[\underline{u}](\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega), \quad (1.7)$$

¹Il faudra donc être attentif à la formulation précise de ces définitions en présence de fissures, cf. chapitre 4.

²La mention « par morceaux » permet la prise en compte de discontinuités de déformations, par exemple à la traversée d'interfaces entre matériaux collés.

³Les ensembles $\mathcal{C}(\underline{0})$ et \mathcal{C} sont alors les espaces de fonctions habituellement désignés en analyse fonctionnelle par les notations $H_0^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ (Allaire, 2004).

où la notation $\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]$ désigne l'opération consistant à évaluer selon (1.1a) le tenseur de déformation linéarisé associé à un champ de déplacement \underline{v} . On cherche donc le couple unique $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ de champs de déplacement cinématiquement admissible et de contrainte statiquement admissible qui se correspondent par le comportement élastique linéaire.

1.1.3 Rappel des propriétés de la relation de comportement élastique

Dans l'équation de comportement (1.1c), le tenseur \mathcal{A} des modules d'élasticité est d'ordre 4, possède les symétries

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{klij} \quad (1.8)$$

et est associé à une forme quadratique définie positive sur les tenseurs symétriques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}}, \|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T. \quad (1.9)$$

Compte tenu des symétries (1.8), un comportement élastique anisotrope général est susceptible d'être défini par au maximum 21 coefficients d'élasticité indépendants. Dans le cas du matériau isotrope, il n'y a que deux coefficients d'élasticité indépendants et le tenseur \mathcal{A} peut se mettre sous diverses formes en termes des modules d'élasticité isotrope usuels, par exemple :

$$\mathcal{A} = 3\lambda\mathcal{J} + 2\mu\mathcal{I} = 2\mu\left(\frac{3\nu}{1-2\nu}\mathcal{J} + \mathcal{I}\right) = 3\kappa\mathcal{J} + 2\mu\mathcal{K}. \quad (1.10)$$

Dans ces expressions, (λ, μ) sont les constantes de Lamé, ν est le coefficient de Poisson, κ est le module de compressibilité, et les tenseurs d'ordre 4 $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ sont définis comme suit :

- Le tenseur \mathcal{I} est associé à l'identité entre tenseurs symétriques du second ordre :

$$\mathcal{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}); \quad (1.11)$$

- le tenseur \mathcal{J} est associé à la projection sur le sous-espace des tenseurs sphériques :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad \text{soit, en composantes : } \mathcal{J}_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}; \quad (1.12)$$

- Le tenseur \mathcal{K} est associé à la projection sur le sous-espace des tenseurs déviatoriques (c'est-à-dire de trace nulle) :

$$\mathcal{K} = \mathcal{I} - \mathcal{J}. \quad (1.13)$$

Ces tenseurs, introduits dans le cours de Plasticité et rupture (Suquet, 2004), vérifient

$$\mathcal{J} : \mathcal{J} = \mathcal{J}, \quad \mathcal{K} : \mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad \mathcal{J} : \mathcal{K} = 0. \quad (1.14)$$

Enfin, on définit le tenseur \mathcal{S} des souplesses élastiques, associé à la forme inverse de la relation de comportement (1.1c), par

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \iff \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathcal{S} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad \text{soit } \mathcal{A} : \mathcal{S} = \mathcal{S} : \mathcal{A} = \mathcal{I}. \quad (1.15)$$

Ce tenseur d'ordre 4 vérifie les mêmes propriétés de symétrie (1.8) que \mathcal{A} et est également défini positif :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{S} : \underline{\underline{\varepsilon}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}}, \|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \neq 0 \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T. \quad (1.16)$$

1.2 Principe des puissances virtuelles, formulation faible de l'équilibre

L'équation locale d'équilibre (1.1b) peut être exprimée sous une forme intégrale équivalente par dualisation, c'est-à-dire multiplication par un champ $\underline{w} \in \mathcal{C}$ arbitraire et intégration sur Ω . On obtient ainsi la *forme faible* de l'équation locale d'équilibre

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\partial\Omega} [\underline{\sigma} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}, \quad (1.17)$$

qui correspond en fait au principe des puissances virtuelles (PPV) appliqué au cas de l'équilibre (les membres de gauche et de droite de l'égalité (1.17) correspondant respectivement aux puissances dans la vitesse virtuelle \underline{w} des efforts intérieurs – avec changement de signe – et des efforts extérieurs). Bien noter que l'intégrale de surface représente alors la puissance virtuelle de *tous* les efforts de contact subis par la frontière du solide analysé, sans distinction liée aux conditions aux limites.

On peut alors incorporer dans l'identité (1.17) du principe des puissances virtuelles la relation combinant la compatibilité locale (1.1a) et le comportement élastique (1.1c) :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathcal{A} : \underline{\varepsilon}[\underline{u}](\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega). \quad (1.18)$$

Tenant par ailleurs compte de la condition aux limites (1.1e), le principe des puissances virtuelles prend la forme

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS + \int_{S_u} [\underline{\sigma} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C} \quad (1.19)$$

Cette identité présente notamment les caractéristiques suivantes : (i) elle ne fait pas référence aux données cinématiques (1.1d), et (ii) elle fait intervenir le vecteur-contrainte $\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ sur S_u , a priori inconnu et représentant les réactions associées à l'imposition de déplacements sur S_u . Compte tenu de ces remarques, on peut formuler le problème d'équilibre de deux manières à partir des équations (1.19), selon qu'on choisit d'éliminer la réaction ou de faire figurer explicitement la donnée cinématique (1.1d).

Première variante : formulation faible obtenue par élimination de la réaction. Pour que la réaction \underline{T} sur S_u ne figure pas dans la formulation finale, il suffit de restreindre (1.19) aux champs virtuels cinématiquement admissibles à zéro. La donnée cinématique (1.1d) est alors prise en compte dans la définition de l'espace $\mathcal{C}(\underline{u}^D)$ dans lequel \underline{u} est cherché. On obtient ainsi la *formulation faible* suivante pour le problème d'équilibre élastique (1.1a–d) :

trouver $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} \, dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}). \quad (1.20)$$

Deuxième variante : formulation faible obtenue par incorporation de la donnée cinématique. On peut préférer conserver la réaction \underline{T} sur S_u dans la formulation faible finale. Celle-ci est alors obtenue en adjoignant à (1.19) la condition (1.1d) écrite sous forme faible à l'aide d'un « vecteur contrainte virtuel » \underline{T}' pouvant prendre des valeurs arbitraires sur S_u , et s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (\underline{u}, \underline{T}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'[S_u] \text{ tel que} \\ & \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}] dV - \int_{S_u} \underline{T} \cdot \underline{w} dS = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}, \\ & \int_{S_u} \underline{u} \cdot \underline{T}' dS = \int_{S_u} \underline{u}^D \cdot \underline{T}' dS \quad \forall \underline{T}' \in \mathcal{C}'[S_u]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

dans laquelle $\mathcal{C}'[S_u]$ est l'ensemble des champs de vecteurs contrainte sur S_u définis par dualité par rapport aux éléments de \mathcal{C} , c'est-à-dire tels que les intégrales sur S_u dans (1.21) sont définies pour tout champ cinématique appartenant à \mathcal{C} .

Commentaire. La démarche de construction d'une formulation faible par introduction des équations locales de compatibilité et de comportement dans la forme intégrale de l'équation d'équilibre (puissances virtuelles), introduite ici dans le cadre restreint de l'élasticité linéaire, est en fait d'application très générale. Elle est en particulier utilisée dans cet ouvrage pour des comportements non-linéaires (chapitres 6, 7) et en dynamique (chapitre 9).

1.3 Principes du minimum, formulation variationnelle de l'équilibre

Dans certains cas, et notamment pour l'équilibre des solides élastiques considéré dans ce chapitre, la solution peut également être caractérisée par le fait qu'elle rend minimale une énergie. C'est en fait dans ce cadre que les premiers développements de la méthode des éléments finis ont été proposés. Cette section est consacrée à ce point de vue énergétique.

1.3.1 Erreur en relation de comportement

On a rappelé plus haut la division en trois grands groupes des équations gouvernant l'état mécanique d'un milieu continu : compatibilité, équilibre et comportement. Introduisons alors l'erreur en relation de comportement

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\tau}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]) : \underline{\underline{\mathcal{S}}} : (\underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]) dV, \quad (1.22)$$

où \underline{v} est un champ de déplacement, $\underline{\underline{\tau}}$ un champ de contrainte et $\underline{\underline{\mathcal{S}}}$ désigne le tenseur des souplesses élastiques défini par (1.15). La fonctionnelle $\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\tau}})$ ainsi définie est donc une mesure énergétique de l'écart à la satisfaction de la relation de comportement élastique. De plus, $\underline{\underline{\mathcal{S}}}$ étant défini positif, la fonctionnelle \mathcal{E} a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\tau}}) \geq 0 \quad \forall (\underline{v}, \underline{\underline{\tau}}), \\ & \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\tau}}) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] = 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \quad (1.23)$$

On peut alors, à partir de (1.7), poser le problème de l'équilibre élastique au moyen de la fonctionnelle \mathcal{E} :

$$\text{trouver } (\underline{u}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \times \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) \quad \text{tels que} \quad \mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\sigma}) = 0. \quad (1.24)$$

Les propriétés (1.23) et la formulation (1.24) entraînent donc que la solution $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ du problème d'équilibre élastique réalise le minimum de l'erreur en relation de comportement, ce qui permet de chercher $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ comme solution du problème de minimisation

$$\text{trouver } (\underline{u}, \underline{\sigma}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \times \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) \quad \text{tels que} \quad \mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\sigma}) \leq \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau}) \\ \forall (\underline{v}, \underline{\tau}) \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \times \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}). \quad (1.25)$$

Pour que $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ ainsi obtenu soit la solution d'un problème d'équilibre élastique bien posé, il faut $\mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\sigma}) = 0^4$.

La notion d'erreur en relation de comportement s'étend à des lois de comportement non linéaires (Moës et al., 1999b; Ladevèze, 1999); cette généralisation sort du cadre de ce cours.

1.3.2 Énergies potentielle et complémentaire

Le problème de minimisation (1.25) porte *a priori* sur la recherche d'un couple contrainte-déplacement. Il est en fait très facile de découpler ce problème en deux problèmes de minimisation indépendants, l'un sur les déplacements et l'autre sur les contraintes. Pour cela, on réécrit l'erreur en relation de comportement (1.22) sous la forme développée

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\tau}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\tau} : \underline{\mathcal{S}} : \underline{\tau} dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] dV - \int_{\Omega} (\underline{\tau} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}]) dV.$$

Le premier terme ne dépend que du déplacement, tandis que le second ne dépend que de la contrainte. Enfin, on remarque que la forme (1.17) du principe des puissances virtuelles est vraie pour tout $\underline{\tau} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})$, et est applicable pour le choix de champ virtuel $\underline{w} = \underline{v}$, ce qui

⁴Si les conditions aux limites sont bien posées (voir section 1.1), on sait que le problème (1.1a–e) admet une solution unique (éventuellement à mouvement rigidifiant près), de sorte que la solution du problème de minimisation (1.25) vérifie $\mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\sigma}) = 0$.

Il existe des situations, hors du cadre de ce cours, où on est en possession de données aux limites *surabondantes*, obtenues expérimentalement, de sorte que le déplacement *et* le vecteur contrainte soient simultanément connus en certains points de la frontière. On peut encore dans ce cas définir et minimiser une fonctionnelle d'erreur en relation de comportement. Le problème de minimisation (1.25) est dans ce cas susceptible de conduire à une solution $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ telle que $\mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\sigma}) > 0$. Cela indique que la modélisation du solide, caractérisée par la donnée de Ω et $\underline{\mathcal{A}}$, n'est pas cohérente avec les conditions aux limites. Quand ces dernières sont d'origine expérimentale, et donc représentatives de la structure réelle, $\mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\sigma}) > 0$ traduit le fait que le modèle ne représente pas correctement la structure réelle : mauvaise connaissance des modules d'élasticité, présence d'une cavité, fissure ou autre défaut non pris en compte dans la définition de Ω (voir l'article de synthèse par Bonnet et Constantinescu, 2005, et les références y citées), données aux limites non compatibles (Baranger et Andrieux, 2006)...

permet de mettre le troisième terme ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} [\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{v} \, dS \\ &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS + \int_{S_u} [\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^D \, dS, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité tient compte des conditions d'admissibilité (1.1d,e). On parvient ainsi à exprimer l'erreur en relation de comportement comme somme d'une *énergie potentielle* $\mathcal{P}(\underline{v})$ et d'une *énergie complémentaire* $\mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}})$:

$$\mathcal{E}(\underline{v}, \underline{\underline{\tau}}) = \mathcal{P}(\underline{v}) + \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}}) \quad (1.26)$$

avec les définitions

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{v}) &= \mathcal{W}(\underline{v}) - \mathcal{F}(\underline{v}), \\ \mathcal{W}(\underline{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] \, dV, & \mathcal{F}(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} \, dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{v} \, dS, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \mathcal{W}^*(\underline{\underline{\tau}}) - \mathcal{F}^*(\underline{\underline{\tau}}), \\ \mathcal{W}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\mathcal{S}}} : \underline{\underline{\tau}} \, dV, & \mathcal{F}^*(\underline{\underline{\tau}}) &= \int_{S_u} [\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^D \, dS. \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.3.3 Minimisation des énergies, formulations variationnelles

La décomposition (1.26) montre clairement qu'on peut traiter la recherche du déplacement et de la contrainte solutions du problème de l'équilibre d'un solide élastique de façon séparée. Le déplacement \underline{u} solution est obtenu par minimisation de l'énergie potentielle sur l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles :

$$\underline{u} = \arg \min_{\underline{v} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)} \mathcal{P}(\underline{v}) \quad (1.29)$$

tandis que la contrainte solution $\underline{\underline{\sigma}}$ est obtenue par minimisation de l'énergie complémentaire sur l'ensemble des contraintes statiquement admissibles :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \arg \min_{\underline{\underline{\tau}} \in \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})} \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\tau}}) \quad (1.30)$$

(la notation $x = \arg \min_y f(y)$ signifie que x est une valeur de l'argument y telle que $f(y)$ soit minimale). Rappelons que $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ ne définissent la solution que s'ils vérifient

$$\mathcal{E}(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \mathcal{P}(\underline{u}) + \mathcal{P}^*(\underline{\underline{\sigma}}) = 0.$$

Équation de stationnarité de l'énergie potentielle. La variation de l'énergie potentielle \mathcal{P} autour d'un champ admissible \underline{v} peut être écrit sous la forme

$$\mathcal{P}(\underline{v} + \eta \underline{w}) - \mathcal{P}(\underline{v}) = \eta \langle \mathcal{P}'(\underline{v}), \underline{w} \rangle + o(\eta) \quad (\text{avec } \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{Q})), \quad (1.31)$$

la variation $\eta \underline{w}$ d'amplitude $\eta \geq 0$ autour de \underline{v} étant choisie cinématiquement admissible à

zéro de façon à ce que le champ $\underline{v} + \eta \underline{w}$ soit cinématiquement admissible avec les données. Le développement (1.31) définit (quand elle existe) l'application linéaire tangente $\mathcal{P}'(\underline{v})$ en \underline{v} associée à \mathcal{P} . Le champ de déplacement $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ qui réalise la minimisation de l'énergie potentielle est tel que, pour tout champ admissible $\underline{v} = \underline{u} + \eta \underline{w}$, la variation de l'énergie potentielle est nulle à l'ordre 1 en η :

$$\left. \frac{d}{d\eta} \mathcal{P}(\underline{v} + \eta \underline{w}) \right|_{\eta=0} = 0, \quad \text{soit} \quad \langle \mathcal{P}'(\underline{u}), \underline{w} \rangle = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}). \quad (1.32)$$

Cette condition, explicitée à partir de la définition (1.27), conduit à l'équation

trouver $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D)$ tel que

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}[\underline{u}] : \underline{\mathcal{A}} : \underline{\varepsilon}[\underline{w}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w} dS \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{C}(\underline{0}), \quad (1.33)$$

appelée *formulation variationnelle* du problème d'élasticité linéaire (1.1a–e) en ce qu'elle traduit le principe variationnel (1.32). On remarque de plus que (1.33) coïncide avec la formulation faible (1.20) découlant du principe des puissances virtuelles.

Formulation faible, formulation variationnelle. On appelle formulation faible d'une équation de champ la forme dualisée de cette équation obtenue par multiplication par un champ virtuel et intégration sur le support géométrique de l'équation. L'équation (1.17), expression du principe des puissances virtuelles, est ainsi la formulation faible de l'équation locale d'équilibre (1.1b). Une formulation faible est appelée « formulation variationnelle » quand elle exprime la stationnarité d'une fonctionnelle (généralement de nature énergétique). L'équilibre d'un solide élastique pouvant être (par exemple) formulé comme la minimisation de l'énergie potentielle, la formulation faible (1.20) coïncide ainsi avec la formulation variationnelle (1.33) associée à ce principe.

1.4 Minimisation approchée : méthode de Galerkin

Les ensembles $\mathcal{C}(\underline{u}^D)$ et $\mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f})$ de champs admissibles sont des espaces affines de dimension infinie. Il est donc clair que rechercher le minimum absolu de l'énergie potentielle $\mathcal{P}(\underline{v})$, ou de l'énergie complémentaire $\mathcal{P}^*(\underline{\tau})$, est en pratique impossible dans la majorité des cas en raison de la complexité géométrique des systèmes mécaniques réels. En revanche, il est tout à fait concevable de chercher un minimum *approché* de $\mathcal{P}(\underline{v})$ ou $\mathcal{P}^*(\underline{\tau})$ en restreignant la minimisation à un sous-espace de champs admissibles de dimension finie. Explicitons cette approche, connue sous le nom de méthode de Galerkin.

1.4.1 Méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle

Celle-ci consiste à considérer l'énergie potentielle $\mathcal{P}(\underline{v})$ pour des champs \underline{v} de la forme

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K \underline{\varphi}^K(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{u}^{(D)} \in \mathcal{C}(\underline{u}^D) \text{ et } \underline{\varphi}^K \in \mathcal{C}(\underline{0}), \quad (1.34)$$

c'est-à-dire comme somme d'une solution particulière $\underline{u}^{(D)}$ cinématiquement admissible avec les données en déplacement⁵ et d'une combinaison linéaire de fonctions cinématiquement admissibles à zéro. La méthode de Galerkin consiste ainsi à choisir *a priori* une représentation sur un ensemble fini de fonctions ($\underline{u}^{(D)}; \underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^N$), et les inconnues du problème de minimisation sont alors les coefficients α_K des $\underline{\varphi}^K$, souvent appelés *déplacements généralisés*.

L'énergie potentielle calculée pour tout champ de la forme (1.34) est alors donnée par

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} - \{\alpha\}^T \{\mathbb{F}\} + \mathcal{P}(\underline{u}^{(D)}) = P(\{\alpha\}) \quad (1.35)$$

en termes du *vecteur des déplacements généralisés* (ou degrés de liberté) $\{\alpha\}$, tel que

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}^T, \quad (1.36)$$

de la *matrice de rigidité* $[\mathbb{K}]$, dont les coefficients sont donnés par

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^J] dV \quad (1 \leq I, J \leq N), \quad (1.37)$$

et du *vecteur des forces généralisées* $\{\mathbb{F}\}$, de composantes

$$F_I = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] dV + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\varphi}^I dV + \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{\varphi}^I dS \quad (1 \leq I \leq N). \quad (1.38)$$

La matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$ est carrée d'ordre N , $\{\mathbb{F}\}$, $\{\alpha\}$ étant des N -vecteurs.

L'équation (1.35) introduit une convention de notation, fréquemment utilisée dans les publications traitant de la méthode des éléments finis, selon laquelle les vecteurs et matrices associés à la représentation des inconnues du problème approché (ici, les déplacements généralisés) sont respectivement entre accolades $\{\cdot\}$ et crochets $[\cdot]$. Cette convention a pour objet de distinguer les vecteurs et tenseurs définis par référence à l'espace physique (vecteur position \underline{x} , déplacement \underline{v} , déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}, \dots$) et les tableaux de nombres à une ou deux dimensions associés à l'espace vectoriel ou affine abstrait engendré par les fonctions de base de la méthode de Galerkin. De plus, comme suggéré par (1.36), $\{\alpha\}$ indique un N -vecteur colonne et la transposition $\{\alpha\}^T$ un N -vecteur ligne, de sorte que (par exemple) l'expression $\{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\}$ représente un scalaire, en conformité avec les règles usuelles de l'algèbre matricielle⁶.

La matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$ est symétrique et positive, comme conséquence directe des propriétés de symétrie et de positivité de la relation de comportement élastique linéaire (section 1.1.3). Si de plus aucun des $\underline{\varphi}^K$ n'est un mouvement rigidifiant (c'est en particulier nécessairement vrai dès que la portion S_u de $\partial\Omega$ est de mesure non nulle), alors toute combinaison linéaire des $\underline{\varphi}^K$ possède une énergie de déformation non nulle. La matrice de rigidité est dans

⁵La solution particulière $\underline{u}^{(D)}$ est un champ défini sur tout Ω réalisant un *prolongement* à Ω de la donnée \underline{u}^D définie sur S_u , d'où la distinction opérée au niveau des notations.

⁶La syntaxe de MATLAB adhère également à ces conventions, la transposition étant désignée par le symbole « prime » (`var'` est le transposé de la variable vectorielle ou matricielle `var`)

ce cas *définie positive* (c'est-à-dire : $\{\alpha\} \neq \{0\} \Rightarrow \{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} > 0$), et en particulier inversible. *A contrario*, si la représentation (1.34) contient des déplacements rigidifiants, la matrice de rigidité n'est pas inversible : pour tout $\{\alpha\}$ tel que le déplacement (1.34) est rigidifiant, on a $[\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{0\}$. Cette éventualité doit clairement être évitée dans la pratique.

Supposant $[\mathbb{K}]$ définie positive, l'énergie potentielle $P(\{\alpha\})$ définie par (1.35) est strictement convexe par rapport à $\{\alpha\}$ et admet un minimum unique. Ce dernier est trouvé par annulation des dérivées partielles de $P(\{\alpha\})$ (condition nécessaire de minimisation), ce qui conduit au système de N équations à N inconnues

$$[\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\mathbb{F}\} \quad (1.39)$$

et, par inversion, aux déplacements généralisés optimaux

$$\{\alpha^{\min}\} = [\mathbb{K}]^{-1} \{\mathbb{F}\}. \quad (1.40)$$

La solution approchée en déplacement au problème d'équilibre élastique est donc donnée par l'expression (1.34) avec $\{\alpha\} = \{\alpha^{\min}\}$, soit

$$\underline{u}_N(\underline{x}) = \underline{u}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K^{\min} \underline{\varphi}^K(\underline{x}). \quad (1.41)$$

Solution approchée en contrainte. Il est possible d'en déduire, par application de la relation de comportement élastique linéaire, une solution approchée en contrainte, donnée par

$$\underline{\sigma}_N = \underline{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(D)}](\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \alpha_K^{\min} \underline{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^K](\underline{x}).$$

Celle-ci n'est en général pas statiquement admissible, et en particulier ne réalise pas le minimum de l'énergie complémentaire (sauf si, par chance, le déplacement (1.41) correspond à la solution exacte du problème d'équilibre élastique).

Interprétation en termes d'équilibre de forces généralisées. Il est naturel de décomposer le vecteur des forces généralisées (1.38) comme $\{\mathbb{F}\} = \{\mathbb{F}^u\} + \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}$, où $\{\mathbb{F}^u\}$ correspond au premier terme du second membre de (1.38) synthétisant l'effet des déplacements imposés, et $\{\mathbb{F}^{\text{ext}}\}$ rassemble toutes les contributions d'efforts extérieurs imposés. D'autre part, il est également naturel de définir les efforts généralisés intérieurs $\{\mathbb{F}^{\text{int}}\}$ par

$$\{\mathbb{F}^{\text{int}}\} = -[\mathbb{K}] \{\alpha\} + \{\mathbb{F}^u\}, \quad (1.42)$$

c'est-à-dire donnés, pour tout \underline{v} de la forme (1.34), par

$$\mathbb{F}_I^{\text{int}} = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{v}] : \underline{\mathcal{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\varphi}^I] dV \quad (1 \leq I \leq N). \quad (1.43)$$

Avec ces définitions, l'équation d'équilibre (1.39) associée à la méthode de Galerkin s'interprète simplement comme l'équilibre des efforts généralisés intérieurs et extérieurs, soit

$$\{\mathbb{F}^{\text{int}}\} + \{\mathbb{F}^{\text{ext}}\} = \{0\}. \quad (1.44)$$

Méthode de Galerkin pour la formulation variationnelle. Il est possible d'utiliser des représentations de la forme (1.34) directement dans la formulation variationnelle (1.33). Supposant le champ \underline{u} de la forme (1.34) et les champs virtuels \underline{w} de la forme

$$\underline{w}(\underline{x}) = \sum_{K=1}^N \alpha_K \varphi^K(\underline{x}), \quad (1.45)$$

la formulation variationnelle (1.33) devient

$$\{\alpha\}^T [\mathbb{K}] \{\alpha\} = \{\alpha\}^T [\mathbb{F}] \quad \text{pour tout } \{\alpha\} \in \mathbb{R}^N,$$

où $\{\mathbb{F}\}$ et $[\mathbb{K}]$ sont encore définis par (1.37) et (1.38). Cette équation est équivalente à (1.39), et on retrouve ainsi la solution approchée en déplacement définie par (1.40). Les efforts généralisés intérieurs $\mathbb{F}_I^{\text{int}}$ et extérieurs $\mathbb{F}_I^{\text{ext}}$ correspondent en fait aux puissances virtuelles correspondantes dans le champ virtuel $\underline{w} = \underline{\varphi}^I$.

1.4.2 Propriétés de l'approximation obtenue par la méthode de Galerkin

L'erreur sur la solution est orthogonale à $\mathcal{C}(\underline{\Omega})$. Posons $\underline{u} = \underline{u}_N + \Delta\underline{u}$, \underline{u}_N étant la solution approchée (1.41) obtenue par la méthode de Galerkin ($\Delta\underline{u}$ est donc l'erreur par rapport à la solution exacte). Pour tout champ virtuel \underline{w}_N de la forme (1.45), la formulation faible des problèmes exact et approché donne les relations

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV &= \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w}_N dS \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV &= \int_{S_T} \underline{T}^D \cdot \underline{w}_N dS \end{aligned}$$

qui, par soustraction, conduisent à établir que l'erreur $\Delta\underline{u}$ est orthogonale (au sens du produit scalaire associé à l'énergie de déformation) à tout champ virtuel de l'espace d'approximation utilisé :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{w}_N] dV = 0. \quad (1.46)$$

Propriété de meilleure approximation. Développons l'énergie de déformation de $\underline{u} - \underline{u}_N = \Delta\underline{u} + (\underline{u}_N - \underline{u}_N)$, différence entre la solution exacte et un champ quelconque de la forme (1.34) :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{u}_N] dV \\ &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{u}] dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{u}_N] dV + 2 \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N - \underline{u}_N] dV. \end{aligned}$$

Le champ $\underline{u}_N - \underline{u}_N$ étant de la forme (1.45), la dernière intégrale ci-dessus est nulle en raison de la propriété d'orthogonalité (1.46), et on obtient l'inégalité

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{u}] dV \leq \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u} - \underline{u}_N] dV, \quad (1.47)$$

qui montre que \underline{u}_N est la meilleure approximation de \underline{u} , au sens de la norme en énergie, parmi tous les champs de la forme (1.34).

Sous-estimation de l'énergie de déformation. Développons l'énergie de déformation de la solution exacte $\underline{u} = \underline{u}_N + \Delta \underline{u}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV \\ &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] \, dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] \, dV + 2 \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] \, dV. \end{aligned}$$

Supposons que le déplacement imposé est nul ($\underline{u}^D = \underline{0}$), de sorte que la solution approchée \underline{u}_N est également de la forme (1.45). La dernière intégrale ci-dessus est alors nulle en raison de la propriété d'orthogonalité (1.46), et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_N] \, dV &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta \underline{u}] \, dV \\ &< \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] \, dV. \end{aligned} \quad (1.48)$$

En d'autres termes, si $\underline{u} \in \mathcal{C}(\underline{0})$, l'énergie de déformation de la solution approchée \underline{u}_N est *inférieure* à celle de la solution exacte \underline{u} . En ce sens énergétique, \underline{u}_N approche \underline{u} par défaut.

1.4.3 Méthode de Galerkin pour l'énergie complémentaire

Celle-ci consiste à considérer $\mathcal{P}^*(\underline{\tau})$ pour des champs de contrainte $\underline{\tau}$ de la forme

$$\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\tau}}^{(D)}(\underline{x}) + \sum_{K=1}^N \beta_K \underline{\underline{\tau}}^K(\underline{x}) \quad \text{avec } \underline{\underline{\tau}}^{(D)} \in \mathcal{S}(\underline{\tau}^D) \text{ et } \underline{\underline{\tau}}^K \in \mathcal{S}(\underline{0}), \quad (1.49)$$

c'est-à-dire comme somme d'une solution particulière statiquement admissible avec les données et d'une combinaison linéaire de champs statiquement admissibles à zéro. L'énergie complémentaire $\mathcal{P}^*(\underline{\tau})$ calculée pour tout champ de la forme (1.49) est alors donnée par

$$\mathcal{P}^*(\underline{\tau}) = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [\mathbb{S}] \{\beta\} - \{\beta\}^T \{\mathbb{U}^{(D)}\} + \mathcal{P}^*(\underline{\tau}^{(D)}) = P^*(\{\beta\}) \quad (1.50)$$

en termes de la *matrice de souplesse* $[\mathbb{S}]$, dont les coefficients sont donnés par

$$S_{IJ} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}}^I : \mathcal{S} : \underline{\underline{\tau}}^J \, dV \quad (1 \leq I, J \leq N), \quad (1.51)$$

et du vecteur $\{\mathbb{U}^{(D)}\}$ des déplacements généralisés associés aux données cinématiques, de composantes

$$U_1^{(D)} = \int_{S_u} [\underline{\underline{\tau}}^I \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^D \, dS - \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}}^I : \mathcal{S} : \underline{\underline{\tau}}^{(D)} \, dV.$$

La matrice de souplesse $[\mathbb{S}]$ est carrée d'ordre N , définie positive ; $\{\mathbb{U}\}$, $\{\beta\}$ sont des N -vecteurs. La minimisation de $P^*(\{\beta\})$ par rapport à $\{\beta\}$ conduit alors à

$$[\mathbb{S}]\{\beta\} = \{\mathbb{U}^{(D)}\} \Rightarrow \{\beta^{\min}\} = [\mathbb{S}]^{-1}\{\mathbb{U}^{(D)}\}. \quad (1.52)$$

La solution approchée en contrainte est alors donnée par (1.49) avec $\{\beta\} = \{\beta^{\min}\}$. En général, le champ de contrainte ainsi obtenu ne mène pas, via la relation de comportement inverse (1.15), à des déformations compatibles, et ne peut donc pas être intégré en vue d'obtenir une solution approchée en déplacement.

1.4.4 Discussion : vers la méthode des éléments finis

Comparaison des approches par les déplacements et par les contraintes. La méthode de Galerkin pour l'énergie potentielle (approche par les déplacements) est dans son principe assez facile à mettre en œuvre dans la mesure où la construction de bases $(\underline{\varphi}^K)$ vérifiant les conditions d'admissibilité cinématique l'est. Cela découle du fait que les $\underline{\varphi}^K$ ne sont astreints, outre les conditions aux limites sur S_u , qu'à vérifier des conditions de régularité : continuité, énergie de déformation $\mathcal{W}(\underline{\varphi}^K)$ finie.

La méthode de Galerkin pour l'énergie complémentaire (approche par les contraintes) est nettement plus difficile à mettre en œuvre, car les bases $(\underline{\tau}^K)$ doivent être constituées de champs de contrainte statiquement admissibles à zéro, et donc en particulier à divergence nulle. Cela rend la construction de telles familles de champs délicate (on en trouvera un exemple dans l'article de Kempeneers, Beckers et Debongnie, 2004).

La méthode de Galerkin, base de la méthode des éléments finis. Il est assez facile de construire des bases $(\underline{\varphi}^K)$ de fonctions définies sur tout Ω , par exemple à l'aide de fonctions polynômiales ou trigonométriques. Par exemple, il existe des méthodes systématiques de construction de bases polynômiales de degré quelconque à partir de familles de polynômes orthogonaux ; cette approche est à la base des *méthodes spectrales* (Bernardi et Maday, 1992). La méthode de Galerkin développée avec des bases de fonctions définies sur tout Ω (donc de nature « globale ») présente deux caractéristiques notables :

- (a) Les coefficients de la matrice de raideur (ou de souplesse) et du second membre résultent du calcul d'intégrales sur tout Ω ;
- (b) La matrice de raideur (ou de souplesse) est *pleine* : tous les coefficients K_{IJ} donnés par (1.37), ou S_{IJ} donnés par (1.51), sont *a priori* non nuls.

Le point (a) est gênant pour traiter des configurations géométriques complexes, l'intégration numérique devenant alors délicate à mettre en œuvre et chère en temps de calcul. Le point (b) est défavorable en termes de temps de calcul, la résolution d'un système d'équations tel que (1.39) étant plus rapide si la matrice du système linéaire (dans cet exemple, $[\mathbb{K}]$) est *creuse*, c'est-à-dire présente une proportion importante de termes nuls. Une difficulté supplémentaire, et essentielle, de cette approche réside, pour les structures de géométrie complexe, dans la difficulté d'imposer aux fonctions de base définies de façon globale les conditions d'admissibilité cinématique.

La méthode des éléments finis, qui sera exposée en détail à partir du chapitre 2 est une forme particulière de la méthode de Galerkin conçue de façon à éviter ces inconvénients. L'idée principale est de définir des bases constituées de fonctions φ^K à support « petit » (donc de nature « locale »), s'annulant en dehors d'une petite région $\Omega_I \subset \Omega$ de forme simple.

- (a) Les intégrations numériques portent sur des petites régions, ce qui permet une mise en œuvre plus simple et une évaluation numérique plus rapide. Par exemple, le calcul de K_{IJ} défini par (1.37) repose sur une intégration sur $\Omega_I \cap \Omega_J$.
- (b) Tous les coefficients K_{IJ} ou S_{IJ} tels que $\Omega_I \cap \Omega_J = \emptyset$ sont nuls, ce qui conduit à des matrices de raideur ou de souplesse très creuses.
- (c) Le caractère local des fonctions de base facilite grandement l'imposition des conditions cinématiques.

1.5 Récapitulation

Dans ce chapitre, on a montré comment obtenir des formulations faibles équivalentes au problème d'équilibre élastique initial posé en termes d'équations de champ et de conditions aux limites. Ces formulations faibles résultent soit de l'application du principe des puissances virtuelles, dans lequel on incorpore les équations locales de compatibilité et de comportement, soit de l'expression de principes variationnels énergétiques (quand cela est possible).

Une approche générale pour la recherche de solutions approchées repose alors sur la méthode de Galerkin, consistant à représenter les champs de déplacement inconnu et virtuel sur une même base choisie *a priori*. Nous verrons dans les chapitres qui suivent que la méthode des éléments finis peut être vue comme une forme particulière de la méthode de Galerkin, reposant sur des fonctions de base à support géométrique « localisé ».

1.A1 Application : exemple de la sphère

Une sphère creuse, de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 , est soumise à une pression p sur sa face interne et à un déplacement radial imposé d sur sa face externe. On utilise un système de coordonnées sphériques r, θ, φ avec origine au centre de la sphère. Le matériau constitutif est élastique linéaire isotrope (état initial sans pré-contrainte), et on se place dans le cadre HPP habituel et dans des conditions d'équilibre statique isotherme.

Grâce à la symétrie de la géométrie et du chargement on admet *a priori* la symétrie sphérique de la solution. Le déplacement et la déformation sont donc supposés de la forme

$$\underline{u} = u(r)\underline{e}_r, \quad \underline{\varepsilon} = \frac{du}{dr}\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u}{r}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{u}{r}\underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \quad (1.A1)$$

où $u(r)$, déplacement radial, sera l'inconnue principale. Le tenseur de contraintes associé par la relation de comportement élastique linéaire (1c) s'écrit alors

$$\underline{\sigma} = \sigma_{rr}\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{\varphi\varphi}\underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \quad (1.A2)$$

avec :

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{du}{dr} \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left(\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r} \quad (1.A3)$$

Enfin, les conditions aux limites sont :

$$\sigma_{rr}(R_1) = -p \quad u(R_2) = d \quad (1.A4)$$

Formulation forte

On impose les conditions d'équilibre en tout point de la structure. Dans le cas présent, celles-ci conduisent à une équation différentielle scalaire pour $u(r)$:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{d^2u}{dr^2} + 2\frac{1}{r} \frac{du}{dr} - 2\frac{u}{r^2} \right) = 0, \quad R_1 < r < R_2 \quad (1.A5)$$

qui, avec les conditions aux limites 1.A4, représente la formulation forte du problème. Dans ce cas on obtient facilement la solution exacte du problème que l'on utilisera pour effectuer des comparaisons avec les solutions approchées des sections suivantes. De (1.A5), $u(r)$ a nécessairement la forme :

$$u(r) = ar + \frac{b}{r^2} \\ \sigma_{rr} = A - 2\frac{B}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^3}$$

avec

$$a = \frac{A}{E}(1 - 2\nu) \quad b = \frac{B}{E}(1 + \nu)$$

et les constantes A, B sont déterminées par les conditions aux limites (1.A4) :

$$A = \frac{-(1 + \nu)pR_1^3 + 2dER_2^2}{(1 + \nu)R_1^3 + 2(1 - 2\nu)R_2^2} \quad B = R_1^3 R_2^2 \frac{dE + (1 - 2\nu)pR_2}{(1 + \nu)R_1^3 + 2(1 - 2\nu)R_2^2}$$

Formulation faible

On multiplie l'équation (1.A5) par $w(r) \in \mathcal{C}$ et on intègre le résultat sur Ω (le facteur 4π est omis par simplicité) :

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right) w r^2 dr = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C} \quad (1.A6)$$

On intègre par parties par rapport à r les deux termes en σ_{rr} :

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right) w r^2 dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{d(\sigma_{rr} r^2)}{dr} - r(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}) \right) w dr \\ &= [\sigma_{rr} w r^2]_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \left(\sigma_{rr} \frac{dw}{dr} + (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}) \frac{w}{r} \right) r^2 dr = 0 \end{aligned} \quad (1.A7)$$

ce qui conduit, en utilisant les conditions aux limites, au résultat :

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(\sigma_{rr} \frac{dw}{dr} + (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}) \frac{w}{r} \right) r^2 dr = pR_1^2 w(R_1) + \sigma_{rr}(R_2) R_2^2 w(R_2) \quad \forall w \in \mathcal{C} \quad (1.A8)$$

L'équation obtenue correspond à la forme (1.17) de la formulation faible incluant la réaction (ici $\sigma_{rr}(R_2)$) associée à l'imposition du déplacement en R_2 . Pour obtenir la forme (1.20) de la formulation faible ne faisant pas apparaître cette réaction, il faut restreindre les champs virtuels à l'ensemble $\mathcal{C}(0) = \{w \mid w(R_2) = 0\}$ de manière à annuler le deuxième terme du second membre de (1.A8). On obtient

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(\sigma_{rr}[u] \frac{dw}{dr} + (\sigma_{\theta\theta}[u] + \sigma_{\varphi\varphi}[u]) \frac{w}{r} \right) r^2 dr = pR_1^2 w(R_1) \quad \forall w \in \mathcal{C}(0), \quad (1.A9)$$

qui correspond exactement à (1.20). D'une certaine manière, le fait de connaître la solution u en $r = R_2$ rend inutile l'écriture d'une équation en ce point, et on y annule donc le champ virtuel.

Formulation variationnelle

On sait que la fonctionnelle d'énergie potentielle est minimale à l'équilibre dans l'espace des fonctions cinématiquement admissibles $\mathcal{C}(u^D)$, qui est ici l'ensemble des fonctions $v(r)$ continues, dérivables par morceaux, et telles que $v(R_2) = d$:

$$u = \arg \min_{v \in \mathcal{C}(u^D)} (\mathcal{W}[v] - \mathcal{F}[v]) \quad (1.A10)$$

avec :

$$\mathcal{W}[v] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{rr}[v] \varepsilon_{rr}[v] + \sigma_{\theta\theta}[v] \varepsilon_{\theta\theta}[v] + \sigma_{\varphi\varphi}[v] \varepsilon_{\varphi\varphi}[v]) dV \quad (1.A11)$$

$$= \frac{4\pi}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 + 4\lambda \frac{v}{r} \frac{dv}{dr} + 4(\lambda + \mu) \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right\} r^2 dr$$

$$\mathcal{F}[v] = 4\pi p_1 R_1^2 v(R_1) \quad (1.A12)$$

La minimisation de $\mathcal{W}[v] - \mathcal{F}[v]$ dans l'espace $\mathcal{C}(u^D)$ de dimension infinie conduit à la solution exacte du problème. Compte tenu du fait que la fonctionnelle est convexe, la recherche du minimum revient à la détermination de son point stationnaire. Pour tout $v \in \mathcal{C}(u^D)$, on peut poser $v(r) = u(r) + \eta w(r)$, avec $w \in \mathcal{C}(0)$. La condition de stationnarité pour une fonctionnelle est alors équivalente à l'équation :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}[u + \eta w] - \mathcal{P}[u]}{\eta} = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C}(0)$$

qui donne :

$$\int_{R_1}^{R_2} \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} \frac{dw}{dr} + 2\lambda \left(\frac{u}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{w}{r} \frac{du}{dr} \right) + 4(\lambda + \mu) \frac{u}{r} \frac{w}{r} \right\} r^2 dr - p w(R_1) R_1^2 = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C}(0) \quad (1.A13)$$

On remarque, en utilisant l'expression des contraintes et des déformations en fonction de u , que la condition de stationnarité (1.A13) peut aussi se mettre sous la forme

$$\int_{R_1}^{R_2} \left\{ \sigma_{rr}[u] \varepsilon_{rr}[w] + \sigma_{\theta\theta}[u] \varepsilon_{\theta\theta}[w] + \sigma_{\varphi\varphi}[u] \varepsilon_{\varphi\varphi}[w] \right\} r^2 dr - pw(R_1)R_1^2 = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C}(0) \quad (1.A14)$$

qui correspond en fait à (1.33) dans laquelle on a pris en compte l'hypothèse de symétrie sphérique (1.A2) pour le tenseur des contraintes.

Solution approchée : méthode des différences finies

La méthode des différences finies est utilisée pour résoudre la forme forte des équations de champ :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - 2 \frac{u}{r^2} = 0, \quad R_1 < r < R_2 \quad (1.A15)$$

avec les conditions aux limites (1.A4). On considère le segment $R_1 \leq r \leq R_2$ sur lequel on définit N_N nœuds de coordonnée radiale $r_i = R_1 + (i-1)h$ ($1 \leq i \leq N_N$) régulièrement espacés de h . La solution numérique du problème revient à déterminer les valeurs nodales $u^{(i)} = u(r_i)$ en imposant (1.A15) en chaque nœud. Les dérivées sont remplacées par des formules aux différences finies. Par exemple, la technique des différences centrées donne :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr}(r_i) &= \frac{u^{(i+1)} - u^{(i-1)}}{2h} + O(h^2) \\ \frac{d^2 u}{dr^2}(r_i) &= \frac{u^{(i+1)} - 2u^{(i)} + u^{(i-1)}}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \quad (1.A16)$$

et cette condition est imposée pour tout nœud à l'intérieur du segment. Pour les nœuds de bord on a par contre les conditions aux limites :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{2h} + 2\lambda \frac{u^{(1)}}{R_1} = -p, \quad u^{(N_N)} = d \quad (1.A17)$$

L'ensemble des équations permet de déterminer les valeurs nodales $u^{(i)}$. L'application de cette approche devient rapidement très compliquée pour des problèmes vectoriels sur des domaines complexes, surtout à cause des difficultés liées à l'imposition de conditions aux limites et à la création d'une grille de nœuds suffisamment régulière. Ces limitations sont très gênantes en mécanique des solides, et donc d'autres méthodes sont préférées dans ce domaine, en particulier la méthode des éléments finis.

Solution approchée : méthode de Galerkin avec polynômes

On montre un choix possible de fonctions pour l'application de la méthode de Galerkin. On fixe une solution particulière cinématiquement admissible :

$$u^{(D)}(r) = -d \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$$

et aussi l'espace des fonctions $v_N(r) \in \mathcal{C}(u^D)$:

$$v_N(r) = u^{(D)}(r) + \sum_{I=1}^N \alpha_I (r - r_2)^I$$

ou $N \geq 0$ définit la dimension, et donc la richesse, de l'espace. Pour $N = 0$ on a $v_N(r) = u^{(D)}(r)$.

Définir un tel espace, composé de fonctions de base globales (définies sur le domaine Ω complet), devient très difficile pour des géométries complexes à cause des conditions aux limites cinématiques. Comme pour la méthode des différences finies, la méthode de Galerkin reposant sur des fonctions de base globales est donc mal adaptée à la complexité géométrique des problèmes habituellement rencontrés en mécanique des structures.

Dans le cas présent, la simplicité du domaine permet de la mettre en œuvre. On se limite ici à montrer quelques résultats, sans détailler la procédure de calcul. Le tableau 1.A1 présente la convergence de l'énergie potentielle totale pour quatre situations différentes avec des espaces de polynômes de plus en plus riches. La première ligne donne l'erreur relative de l'énergie potentielle par rapport à la solution, tandis que la deuxième et la troisième indiquent une mesure de l'erreur sur le déplacement et sa dérivée, reposant sur la norme définie par

$$\|f\|_0 = \left(\int_{R_1}^{R_2} f^2 r^2 dr \right)^{1/2}$$

Ordre des polynômes N	0	1	2	3
err. relative sur \mathcal{P}	1,29087	0,442361	0,0596442	0,00501164
$\ u - u_N\ _0$	0,157699	0,0341987	0,00790153	0,00201395
$\ (du/dr) - (du_N/dr)\ _0$	0,423933	0,244242	0,0810537	0,0226432

Tableau 1.A1: Convergence vers la solution, pour les données $E = 1$, $\nu = 0,3$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $p = 1$, $d = -0,1$

Solution approchée : méthode de Galerkin avec champs linéaires par morceaux type éléments finis

On se propose d'analyser une procédure MATLAB pour la solution numérique de la formulation variationnelle de la sphère. Ce problème sert d'introduction aux problèmes plus complexes analysés dans les chapitres suivants. Le fichier MATLAB `sphere_line1_B2S.m` contient les instructions décrites dans la suite.

On considère le segment $R_1 \leq r \leq R_2$ et l'on le partage en N_E « morceaux » (éléments) que l'on suppose numérotés de façon consécutive selon les r croissants. Le nombre d'éléments $N_E \rightarrow NE$ est fixé par l'utilisateur, aussi bien que les rayons $R_1 \rightarrow R1$, $R_2 \rightarrow R2$, les coefficients élastiques E et $\nu \rightarrow nu$, la valeur de la pression interne p et le déplacement imposé d en R_2 . Le symbole \triangleright est utilisé dans le texte pour désigner la « traduction » MATLAB de la quantité qui le précède.

```
R1=1; R2=2; % inner and outer radii
NE=6; % number of elements
```

```

E=1.; % Young modulus
nu=.3; % Poisson coefficient
p=1; % value of inner pressure
d=-.1; % value of imposed displacement at r=r2

On appelle « nœuds » les  $N_N = N_E + 1$  extrémités des éléments. A partir des données en entrée
on définit donc les coordonnées des nœuds dans coor et les constantes des Lamé :

h=(R2-R1)/NE; % size of one element
NN=NE+1; % number of nodes
coor=[R1:h:R2]'; % nodal coordinates: uniform discretization
mu=E/(2*(1+nu)); % definition of Lamé constants
lambda=2*nu*mu/(1-2*nu);

```

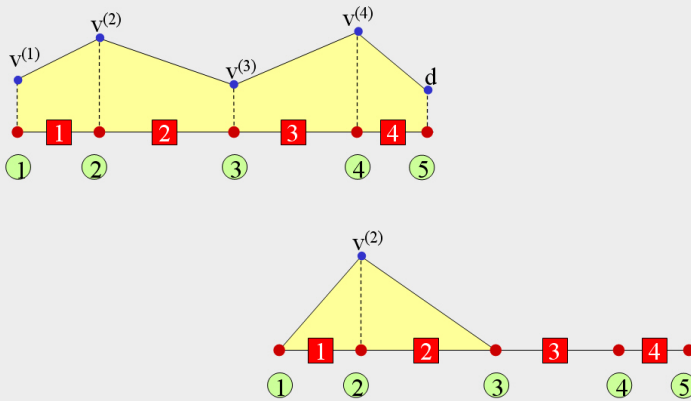


Figure 1.A1: Problème de la sphère. Champ de déplacement linéaire par morceaux $v \in \mathcal{C}_h(d)$

On définit l'espace de dimension finie $\mathcal{C}_h(d)$ des fonctions v continues, cinématiquement admissibles avec la donnée d et affines par morceaux (sur chaque élément), où $h = (R_2 - R_1)/N_E$ désigne la taille caractéristique d'élément. Les fonctions de $\mathcal{C}_h(d)$ sont complètement définies par les valeurs $v^{(i)}$ aux nœuds (valeurs « nodales »).

On crée le vecteur `displ` pour sauver les valeurs nodales de déplacement. On suppose que la numérotation des nœuds et des inconnues associées est croissante de gauche à droite. Le premiers `neq=NN-1` coefficients sont donc inconnus au début de l'analyse. La condition d'admissibilité cinématique se traduit ici par le fait que la valeur nodale $v^{(N_N)}$ en $r = R_2$ (le dernier coefficient de `displ`) est égale à d .

```

displ=zeros(NN,1); % initialisation of displacements
displ(NN)=d; % puts imposed displacement on last node
neq=NN-1; % number of unknown nodal values

```

En vertu de la formulation variationnelle, la solution approchée du problème est la fonction $u_h \in \mathcal{C}_h(d)$ telle que :

$$u_h = \arg \min_{v_h \in \mathcal{C}_h(d)} (\mathcal{W}[v_h] - \mathcal{F}[v_h])$$

avec \mathcal{W} et \mathcal{F} définies en (1.A11). L'expression de l'énergie potentielle est additive par rapport aux éléments et le champ de déplacement choisi étant recherché linéaire par morceaux, l'approche naturelle est d'analyser élément par élément.

Analyse d'un élément. Considérons donc l'élément générique e défini par les noeuds e et $e + 1$. Soit :

$$\{\mathbb{V}_e\} = \{v^{(e)} \quad v^{(e+1)}\}^T$$

la liste des déplacements nodaux associés à l'élément. On introduit aussi une abscisse s , $0 \leq s \leq h$ (h : longueur de l'élément). Le déplacement est affine sur l'élément et dépend seulement de $v^{(e)}$, $v^{(e+1)}$:

$$v_h(s) = v^{(e)} \left(1 - \frac{s}{h}\right) + v^{(e+1)} \frac{s}{h} \quad (1.A18)$$

$$\frac{dv_h}{dr} = \frac{dv}{ds} = \frac{1}{h} \left(-v^{(e)} + v^{(e+1)}\right) \quad (1.A19)$$

ou, de manière équivalente :

$$\begin{aligned} v_h(s) &= \{N_e\}^T \{\mathbb{V}_e\} \\ \frac{dv_h}{dr} &= \frac{dv_h}{ds} = \{B_e\}^T \{\mathbb{V}_e\} \end{aligned} \quad (1.A20)$$

avec :

$$\{N_e\} = \left\{1 - \frac{s}{h}, \quad \frac{s}{h}\right\}^T, \quad \{B_e\} = \frac{1}{h} \{-1 \quad 1\}^T$$

La coordonnée radiale r elle-même est fonction de s :

$$r = r^{(e)} + s \quad (1.A21)$$

On est maintenant prêt à évaluer la contribution de l'élément à l'énergie élastique \mathcal{W} :

$$\frac{1}{2} \int_0^h \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(\frac{dv_h}{dr}\right)^2 + 4\lambda \frac{v_h}{r} \frac{dv_h}{dr} + 4(\lambda + \mu) \left(\frac{v_h}{r}\right)^2 \right\} r^2 ds = \frac{1}{2} \{\mathbb{V}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{V}_e\}$$

où la matrice $[\mathbb{K}_e]$, dite matrice de rigidité de l'élément, a la forme suivante :

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_e] &= \int_0^h \left\{ (\lambda + 2\mu) \{B_e\} \{B_e\}^T r^2 + 4\lambda \left(\{N_e\} \{B_e\}^T + \{N_e\}^T \{B_e\} \right) r \right. \\ &\quad \left. + 4(\lambda + \mu) \left(\{N_e\} \{N_e\}^T \right) \right\} ds \\ &= (\lambda + 2\mu) \frac{r^{(e+1)2} + r^{(e)} r^{(e+1)} + r^{(e)2}}{3L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\lambda}{3} \begin{bmatrix} -2(L + 3r^{(e)}) & -L \\ -L & 2(L + 3r^{(e)}) \end{bmatrix} + \frac{2(\lambda + \mu)L}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.A22)$$

Ces développements se traduisent immédiatement (par exemple) en langage Matlab. La fonction `Ke=line1_stiff_B2S(S,lambda,mu)` reçoit en entrée les coordonnées des noeuds de l'élément (vecteur `S`) et les modules d'élasticité (scalaires `lambda` et `mu`) et effectue l'intégration :

```
function Ke=line1_stiff_B2S(S,lambda,mu);

r1=S(1); r2=S(2);           % radial coordinates of nodes
h=r2-r1;                    % length of element
Ke=(lambda+2*mu)*...       % element stiffness matrix
    (r2^2+r1*r2+r1^2)/(3*h)*[1 -1;-1 1]+...
    lambda/3*...
    [-2*(h+3*r1) -h; -h 2*(2*h+3*r1)]+...
    2*(lambda+mu)*h/3*[2 1;1 2];
```

Analyse de la structure complète. Grâce à l'additivité de l'énergie élastique, on a :

$$\mathcal{W}[v_h] = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_E} \{\mathbb{V}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{V}_e\} \quad (1.A23)$$

Si l'on introduit la liste $\{\mathbb{V}\}$ constituée par les valeurs nodales du déplacement sur les premiers $N-1$ noeuds, alors les expressions précédentes peuvent se décomposer comme :

$$\mathcal{W}[v_h] = \frac{1}{2} \{\mathbb{V}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{V}\} + \{\mathbb{V}\}^T \{\mathbb{F}^d\} + C_1 \quad (1.A24)$$

$$\mathcal{F}[v_h] = \{\mathbb{V}\}^T \{\mathbb{F}^p\} \quad (1.A25)$$

où $[\mathbb{K}]$, $\{\mathbb{F}^d\}$, $\{\mathbb{F}^p\}$, C_1 sont indépendantes de $\{\mathbb{V}\}$ (la constante C_1 dépend de la donnée en déplacement). A une constante additive près, l'énergie potentielle s'écrit donc

$$\mathcal{W}[v_h] - \mathcal{F}[v_h] = \frac{1}{2} \{\mathbb{V}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{V}\} - \{\mathbb{V}\}^T \{\mathbb{F}\} \quad \text{avec} \quad \{\mathbb{F}\} = \{\mathbb{F}^p\} - \{\mathbb{F}^d\}$$

La construction de la matrice $[\mathbb{K}]$ et du vecteur $\{\mathbb{F}\}$ est une opération dite *d'assemblage*, réalisée par une procédure appliquée successivement à chaque élément. On fait cependant une distinction entre le dernier élément (numéro N_E , supportant le déplacement imposé) et les autres. Pour l'élément N_E on a (compte tenu de la symétrie de $[\mathbb{K}_{N_E}]$) :

$$\frac{1}{2} \{\mathbb{V}_{N_E}\}^T [\mathbb{K}_{N_E}] \{\mathbb{V}_{N_E}\} = [\mathbb{K}_{N_E}]_{1,1} (v^{(N_N-1)})^2 + 2 [\mathbb{K}_{N_E}]_{1,2} v^{(N_N-1)} d + [\mathbb{K}_{N_E}]_{2,2} d^2$$

L'énergie élastique de cet élément contient donc un terme quadratique (contribution à $[\mathbb{K}]$), un terme linéaire (contribution à $\{\mathbb{F}^d\}$) et un terme constant ignoré dans le code.

Les autres éléments, par contre, ne donnent que des termes quadratiques, et donc seulement des contributions à la matrice $[\mathbb{K}]$. On utilise la liste

$$\{I_e\} = \{e, e+1\}$$

pour exprimer la contribution due à l'élément e :

$$[\mathbb{K}]_{\{I_e\}_i, \{I_e\}_j} = [\mathbb{K}]_{\{I_e\}_i, \{I_e\}_j} + [\mathbb{K}_e]_{i,j} \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$$

```

K=zeros(neq,neq);           % allocates stiffness matrix
F=zeros(neq,1);            % allocates rhs side
for e=1:NE
  S=[coor(e) coor(e+1)];    % assemblage of stiffness matrix
  Ke=line1_stiff_B2S(S,lambda,mu); % creates segment
  Ie=[e e+1];              % element stiffness matrix
  if e<NE                   % sets nodal degrees of freedom
    K(Ie,Ie)=K(Ie,Ie)+Ke;   % if not last element
    % the whole Ke goes into K
  else
    K(neq,neq)=K(neq,neq)+Ke(1,1); % else only the first coefficient
    F(neq)=-Ke(1,2)*displ(NN); % and Ke also contributes to rhs
  end
end

```

L'assemblage du vecteur $\{\mathbb{F}^p\}$ est par contre immédiat ici, car $\mathcal{F}[v_h] = \{\mathbb{V}\}_1 R_1^2 p$:

```
F(1)=F(1)+coor(1)^2*p; % contribution from inner pressure
```

Le meilleur champ de l'espace $C_h(d)$ choisi est donc défini par le vecteur $\{U\}$ solution du problème de minimum :

$$\{U\} = \arg \min_{\{V\}} \left(\frac{1}{2} \{V\}^T [K] \{V\} - \{V\}^T \{F\} \right) \quad (1.A26)$$

ce qui est équivalent à la solution du système linéaire :

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (1.A27)$$

On peut donc remplir la table des déplacements avec les premières $N_N - 1$ valeurs nodales :

```
displ(1:NN-1)=K\F; % solution of linear system
```

La noyau du calcul étant terminé le code commence une phase de post-traitement dans laquelle la contrainte radiale est calculée au milieu de chaque élément et on effectue la comparaison avec la solution analytique disponible. La lecture de cette partie est laissée comme exercice.

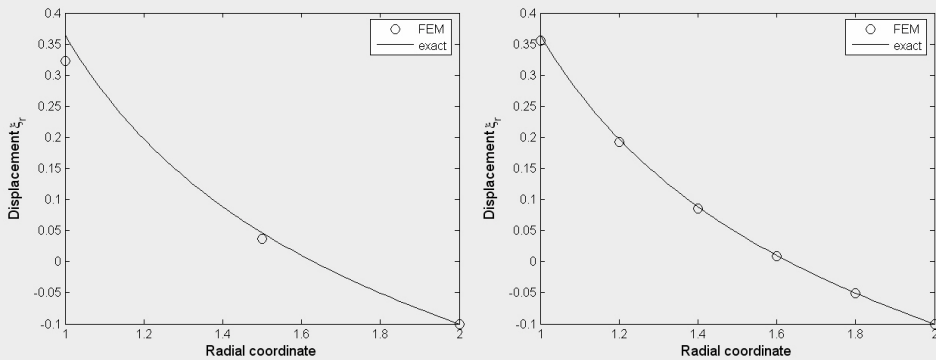


Figure 1.A2: Déplacements nodaux avec 2 et 5 éléments

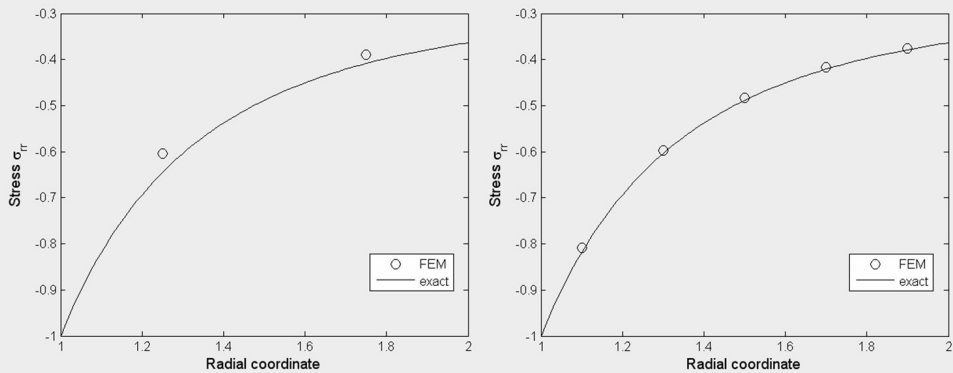


Figure 1.A3: Contraintes radiales aux milieux des éléments avec 2 et 5 éléments

Solution approchée de la formulation faible

La fonction MATLAB développée pour la solution numérique approchée de la formulation variationnelle se prête aussi à la solution de la formulation faible. Suivant l'équation (1.A9), on cherche la solution approchée $u_h \in \mathcal{C}_h(d)$ (le même espace de fonctions linéaires par morceaux de la section 1.A1) vérifiant :

$$\int_{R_1}^{R_2} \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{du_h}{dr} \frac{dw_h}{dr} + 2\lambda \left(\frac{u_h}{r} \frac{dw_h}{dr} + \frac{w_h}{r} \frac{du_h}{dr} \right) + 4(\lambda + \mu) \frac{u_h}{r} \frac{w_h}{r} \right\} r^2 dr - pw_h(R_1)R_1^2 = 0 \quad \forall w_h \in \mathcal{C}_h(0) \quad (1.A28)$$

L'espace $\mathcal{C}_h(0)$ est l'espace des fonctions linéaires par morceaux cinématiquement admissibles à zéro, c'est-à-dire ici telles que la valeur nodale en R_2 soit nulle.

Si $\{\mathbb{W}\}$ est le $(N_N - 1)$ -vecteur des valeurs nodales associées à w_h , des développements tout à fait identiques à ceux de la section précédente permettent d'obtenir la version discrétisée de (1.A28) :

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} - \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}\} = 0 \quad \forall \{\mathbb{W}\} \quad (1.A29)$$

où $[\mathbb{K}]$ et $\{\mathbb{F}\}$ sont identiques à ceux intervenant dans l'équation (1.A27). L'équation scalaire précédente est équivalente au système linéaire :

$$[\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} = \{\mathbb{F}\}$$

Il suffit en effet de poser $\{\mathbb{W}\}_i = 1$, $\{\mathbb{W}\}_{j \neq i} = 0$ pour obtenir la i -ième équation du système.

Exercices

1. Modifier le fichier `sphere_line1_B2S.m` de manière à calculer l'énergie potentielle totale du champ solution et vérifier la convergence à la valeur exacte.
2. Écrire les formulations forte, variationnelle et faible pour un cylindre creux (rayons R_1 et R_2) en déformations planes assujetti à une pression interne p_1 et externe p_2 . Écrire une procédure MATLAB pour la solution numérique de la formulation faible en utilisant un champ linéaire par morceaux comme dans le cas de la sphère.

1.6 Compléments

1.6.1 Conditions aux limites

Pour simplifier l'exposition, on n'a considéré dans ce chapitre que deux possibilités pour les conditions aux limites en un point de la frontière : vecteur déplacement imposé, ou vecteur contrainte imposé. D'autres possibilités existent, et il faut modifier en conséquence la formulation faible ou variationnelle du problème d'équilibre.

À titre d'exemple, considérons le cas où la frontière $\partial\Omega$ est constituée de trois surfaces disjointes

S_u, S_T, S_{sym} , et les conditions aux limites définies par

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^D(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in S_T), \quad (1.53)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^D(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in S_u), \quad (1.54)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0 \quad (\underline{x} \in S_{\text{sym}}), \quad (1.55)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) - \sigma_n(\underline{x}) \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} \quad (\underline{x} \in S_{\text{sym}}), \quad (1.56)$$

où $\sigma_n = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ est la contrainte normale. Les surfaces S_u, S_T supportent, comme précédemment, des valeurs imposées du déplacement ou du vecteur contrainte, tandis que les conditions (1.55) et (1.56) expriment un glissement sans frottement le long de la surface S_{sym} . L'utilité pratique de ce nouveau type de condition vient de ce qu'elle représente le comportement attendu des déplacements et des contraintes sur un plan de symétrie géométrique quand les conditions de chargement sont elles-mêmes symétriques. Elles permettent ainsi de poser le problème d'équilibre sur un domaine réduit par utilisation de symétries planes (la figure 1.2 en montre un exemple).

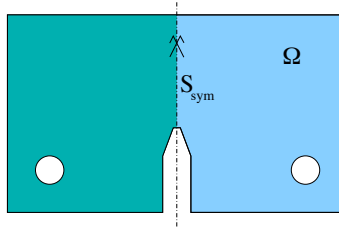


Figure 1.2: Exemple de symétrie par rapport à un plan. Le domaine utile Ω , sur lequel les équations à résoudre sont posées, est la moitié droite du solide (d'autres choix étant aussi possibles).

Il faut alors adapter la définition des espaces de champs admissibles à la nouvelle structure de conditions aux limites. Les ensembles de champs admissibles sont ainsi maintenant

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\underline{u}^D) &= \{ \underline{v} \mid \underline{v} \text{ continu sur } \Omega, \underline{v} = \underline{u}^D \text{ sur } S_u \text{ et } \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } S_{\text{sym}} \}, \\ \mathcal{S}(\underline{T}^D, \underline{f}) &= \{ \underline{\tau} \mid \text{div } \underline{\tau} + \rho \underline{f} = 0 \text{ dans } \Omega, \underline{\tau} \cdot \underline{n} = \underline{T}^D \text{ sur } S_T \text{ et } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \sigma_n \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } S_{\text{sym}} \}, \\ \mathcal{C}(\underline{0}) &= \{ \underline{v} \mid \underline{v} \text{ continu sur } \Omega, \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } S_u \text{ et } \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } S_{\text{sym}} \}. \end{aligned}$$

En reprenant l'argumentation développée en section 1.3, on trouve que les énergies potentielle et complémentaire sont encore définies par les expressions (1.27) et (1.28). La surface de symétrie S_{sym} intervient ainsi dans la définition des ensembles de champs admissibles, et implicitement par le fait que S_u et S_T ne définissent maintenant plus une partition de la frontière $\partial\Omega$.

1.6.2 Estimation de la qualité de la solution approchée

Supposons que les méthodes de minimisation de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire puissent être mises en œuvre simultanément pour la résolution approchée d'un problème d'équilibre du type (1a–e). Pour mesurer la qualité du couple $(\underline{u}_N, \underline{\underline{\sigma}}_N)$ formé par le meilleur déplacement cinématiquement admissible et la meilleure contrainte statiquement admissible obtenus, on peut alors évaluer

son erreur en relation de comportement

$$\mathcal{E}(\underline{u}_N, \underline{\sigma}_N) = P(\{\alpha^{\min}\}) + P^*(\{\beta^{\min}\}).$$

Pour définir un indicateur de qualité d'interprétation simple, il est préférable de le mettre sous forme adimensionnelle. On peut par exemple calculer le quotient

$$\frac{P(\{\alpha^{\min}\}) + P^*(\{\beta^{\min}\})}{|P(\{\alpha^{\min}\})| + |P^*(\{\beta^{\min}\})|}$$

qui doit être aussi petit que possible.